Problema 3

Fie P_d mulţimea tuturor pentagoanelor convexe cu toate laturile congruente între ele şi cu măcar d diagonale congruente.Să se demonstreze că $P_d = P_5$ pentru orice $d \geq 3$ şi că $P_2 \neq P_5$.

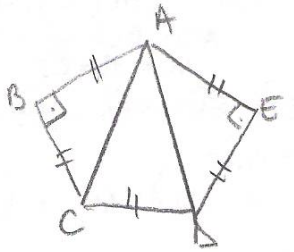
OBS. Cerința este echivalentă cu a demonstra că dacă un pentagon cu toate laturile egale are cel puțin 3 diagonale congruente $\Rightarrow$ toate cele 5 diagonale sunt congruente.

Fiind necesar un exemplu pentru care un pentagon cu toate laturile egale, însă doar cu 2 diag congruente, a.î. pentagonul să nu aibă toate cele 5 diagonale congruente.

Un astfel de exemplu:

Construim Δ isoscel ACD cu $AC = AD$ și $CD = \frac{AC}{\sqrt{2}}$ și construim în exteriorul acestora Δ dreptunghice isoscele ABC și AED $\Rightarrow AB = BC = AE = ED = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{AD}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow AB = BC = CD = DE = EA$ dar pentagonul nu este regulat (dacă toate diagonalele ar fi congruente $\Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta BCD \equiv \Delta CDE \equiv \Delta DEA$ $\Rightarrow ABCDE$ pentagon regulat $\Rightarrow A\hat{B}C = 108^\circ$ dar $A\hat{B}C = 90^\circ$ (ΔABC dr. is. în B) $\Rightarrow$ contradicție) $\Rightarrow$ acest pentagon are exact două diagonale congruente



(putem construi ΔACD pt că $AC + AD = 2AC > CD = \frac{AC}{\sqrt{2}}$)

$\Rightarrow P_2 \neq P_5$

Vom demonstra că dacă avem 3 diag. congruente ⇒ toate cele 5 sunt congruente (OBS. Este evident că ~~dac~~ $P_3 \subseteq P_4 \subseteq P_5 \Rightarrow$ dacă $P_3 = P_5 \Rightarrow P_4 = P_5$ ⇒ este suficient să demonstrăm că $P_3 = P_5$)

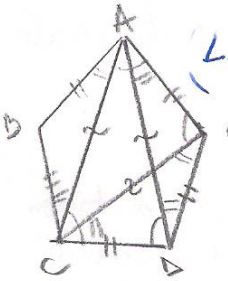
OBS. Cum un pentagon are 5 diagonale AC, AD, BD, BE, CE

P.C.
⇒ oricum am lua 3 diag., ∃ 2 care pleacă din acelaşi v.f.

⇒ fie aceste 2 diag: AC, AD

⇒ avem 2 cazuri:

I $AC = AD = \cancel{BE}\ CE$ (cazul $AC = AD = BD$ se tratează analog)



(L.L.L) $\triangle ABC \equiv \triangle AED \equiv \triangle CDE$ ($\triangle$ → isoscele de laturi $AB = BC = AE = ED = CD$ şi baze $AC = AD = CE$)

⇒ $B\hat{A}C = B\hat{C}A = D\hat{C}E = D\hat{E}C = E\hat{A}D = E\hat{D}A$

⇒ fie $B\hat{A}C = x$

$A\hat{D}C = y$

(L.L.L) $\triangle ACD \equiv \triangle ACE$ ($AC = AD = CE$, baza $AE = CD$)

⇒ $A\hat{E}C = C\hat{A}E = A\hat{C}D = y$

⇒ cum $A\hat{E}D = x + y$ ⇒ $B\hat{A}E = B\hat{A}C + C\hat{A}E = x + y$

$B\hat{C}D = B\hat{C}A + A\hat{C}D = x + y$

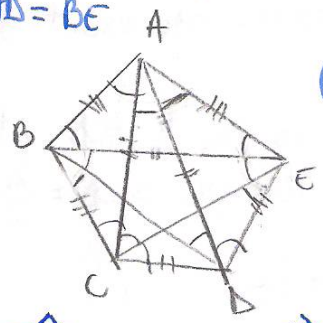
$C\hat{D}E = C\hat{D}A + A\hat{D}E = x + y$

$A\hat{B}C = A\hat{E}D$

⇒ toate ∡ sunt egale ⇒ pent. este regulat

⇒ toate diagonalele sunt congruente

II $AC = AD = BE$



(L.L.L) $\triangle ABC \equiv \triangle AED \equiv \triangle ABE$ ($AB = BC = AE = ED$, $AC = AD = BE$)

⇒ $B\hat{A}C = B\hat{C}A = E\hat{A}D = E\hat{D}A = A\hat{B}E = A\hat{E}B = x$ (1)

$B\hat{C}A = B\hat{E}A$ ⇒ BCEA inscriptibil

⇒ $C\hat{E}B = C\hat{A}B = x$; $E\hat{C}A = E\hat{B}A = x$ (2)

cf (1) ⇒ $E\hat{B}A = E\hat{D}A = x$ ⇒ ABDE inscriptibil ⇒ $E\hat{A}D = E\hat{B}D = x$; $A\hat{D}B = A\hat{E}B = x$

(1); (2) ⇒ $A\hat{C}E = A\hat{D}E = x$ ⇒ ACDE inscriptibil ⇒ $E\hat{C}D = E\hat{A}D = x$ ⇒ cum $\triangle DEC$ isoscel

$D\hat{E}E = x$ ⇒ $C\hat{A}D = x$ analog (ABCD inscriptibil) ⇒ $C\hat{B}D = x$

⇒ $\triangle BCD \equiv \triangle CDE \equiv \triangle ABE$ ($AB = BC = CD = DE = EA$; $C\hat{B}D = A\hat{B}E = D\hat{C}E = x$) $= C\hat{A}B = A\hat{E}B = D\hat{E}C$

⇒ $BD = CE = BE$ ⇒ toate diagonalele sunt congruente

I; II ⇒ $P_3 = P_5$; $P_4 = P_5$

q.e.d.