Problema 2
Etapa 2
Clasa a VII-a

Enunţ: În jurul unei mese rotunde stau n copii, fiecare având un număr par de bomboane. La fiecare pas fiecare copil îi dă celui din stânga jumătate din bomboanele pe care le are. După aceea, cei care au un număr impar de bomboane mai primesc una în plus. Arătaţi că după un număr finit de paşi toţi vor avea acelaşi număr de bomboane.
(De exemplu, dacă avem 3 copii, care au 2,4,6 bomboane - după ce îşi împart bomboanele vor avea 4,3,5 şi cei care au impare mai primesc una în plus, deci vor avea 4,4,6).

Soluţie

Arătăm că maximul si minimul de bomboane pe care le au copiii nu se modifică după fiecare pas.
Notez $2m$ nr. minim de bomboane şi $2M$ nr. maxim.
Un copil care avea înainte de schimb $2k, m \leq k \leq M$ bomboane va avea $k + l, m \leq l \leq M$ sau $k + l + 1, m \leq l \leq M$ dacă $l + k$ este impar, deci minimul şi maximul nu se schimbă.
Deci după un timp, nu va mai fi nevoie să se mai dea bomboane în plus. Pentru a finaliza problema luam S_k suma pătratelor numărului de bomboane al fiecărui copil după pasul k. Cum minimul şi maximul nu se schimbă, S_k poate lua un nr finit de valori.
Scriem S_{k+1} în funcţie de S_k:
$S_k = 4(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$
$S_{k+1} = (a_1 + a_2)^2 + (a_2 + a_3)^2 + \cdots + (a_{n-1} + a_n)^2 + (a_n + a_1)^2 = S_k - [(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)^2 + (a_n - a_1)^2] < S_k$ dacă nu au toti copiii acelaşi nr de bomboane.
Cum S_k poate lua un număr finit de valori, atunci, după un număr finit de paşi toţi copiii vor avea acelaşi număr de bomboane.