Etapa 4, Problema 4
Rezolvaţi în numere întregi pozitive ecuaţia

$$a^{a^a} = b^b.$$

Olimpiadă Belarus, 2000

Soluţie (**Marta Ungureanu**, Craiova şi **Andi Brojbeanu**, Târgovişte).

Evident că $a \leq b$; atunci $k := \log_a b$ este cel puţin egal cu 1. (*)

Logaritmând ecuaţia în baza a, obţinem că $a^a = bk$, deci $k = \frac{a^a}{b} \in \mathbb{Q}$. Vom arăta că numărul k este natural (nenul). Pentru aceasta fie, prin absurd, $k = \frac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbb{N}, p, q \geq 2, (p, q) = 1$. Cum $b = a^k$, ecuaţia din enunţ conduce la $a^a = ka^k$, adică $a^{a-k} = k$. Rezultă că $a^{\frac{aq-p}{q}} = \frac{p}{q}$, deci $a^{aq-p} = \frac{p^q}{q^q} \notin \mathbb{N}$. Atunci:

$$aq - p < 0 \Rightarrow a < \frac{p}{q} = k \Rightarrow a^a < a^k \Rightarrow ka^k < a^k \Rightarrow k < 1,$$

fapt care intră în contradicţie cu (*). În concluzie, k este număr natural.

Notăm $t := a - k$; avem $k = a^t$ şi obţinem că $a = a^t + t$, cu $a, t \in \mathbb{N}, a \neq 0$. Deducem că t nu poate fi nenul, iar pentru $t = 0$ găsim că $a = 1$.

Astfel, perechea $(1, 1)$ este singura soluţie a ecuaţiei.

Soluţie alternativă.

Dacă $a = 1$, atunci $b = 1$; vom arăta că perechea $(1, 1)$ este singura soluţie a ecuaţiei.

Numerele naturale a şi b au aceeaşi factori în descompunerea canonică. Dacă $a \geq 2$, evident că $a < b$; rezultă că există un număr natural k astfel încât $b = ak$, iar ecuaţia devine $a^{a^a} = (ak)^{ak}$.

Vom demonstra că numerele a şi k au aceeaşi factori în descompunerea canonică. Într-adevăr, dacă, prin absurd, q este un număr prim care-l divide pe a, dar nu îl divide pe k, atunci $q^{a^a} = q^{ak}$, de unde $a^a = ak$, deci $k = a^{a-1}$, contradicţie.

Pentru $a \geq 2$, există un număr prim p care apare cu exponentul $\alpha \geq 1$ în descompunerea canonică a lui a. Factorul p va apărea şi în descompunerea lui k, având exponentul $\beta \geq 1$. Urmărind exponentul lui p în cei doi membri ai ecuaţiei, obţinem că

$$\alpha a^a = (\alpha + \beta)^{ak} \Rightarrow \alpha = \left(\frac{(\alpha + \beta)^k}{a}\right)^a \Rightarrow \alpha = n^a, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Cum p^α divide a, ar rezulta că p^{n^a} divide a, ceea ce este imposibil (deoarece p^{n^a} este strict mai mare decât a). Rămâne că ecuaţia nu are soluţii cu $a \geq 2$, deci $(1, 1)$ este singura soluţie.