

Exemple și contraexemple în analiza matematică liceală

ANDREI VERNESCU¹⁾ ²⁾

Abstract. We present some of the basic but nontrivial examples and counterexamples in Calculus and in the beginning of the Mathematical Analysis, respecting the level of the contemporary Romanian highschool syllabus.

Keywords: Sequence of real numbers, limit of a real function at a point, continuity, derivative, Riemann integral, antiderivative.

MSC : 26A06, 26A09, 26A15, 26A27, 26A36, 26C15.

III. Exemple și contraexemple referitoare la funcții, limite, continuitate, proprietatea lui Darboux

5. O funcție care nu admite limită la ∞ . Generalizare

Este funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Stabilirea rezultatului constă în a arăta că nu este îndeplinită condiția din teorema de caracterizare a limitelor de funcții cu ajutorul șirurilor.

Se poate proceda în două moduri:

¹⁾Conf. dr., Universitatea Valahia din Târgoviște, e-mail: avernescu@clicknet.ro

²⁾Prezentul text conține, sub o formă puțin mai dezvoltată, conferința prezentată în ziua de 28 iulie 2009, în cadrul cursurilor pentru perfecționarea profesorilor, Bușteni, 28 iulie - 5 august 2009. (N.R.)

(i) Fie șirurile $(x'_n)_n$ și $(x''_n)_n$, de termen general $x'_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, respectiv $x''_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Atunci $x'_n \rightarrow \infty$, $x''_n \rightarrow \infty$ și avem $f(x'_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 1$, precum și $f(x''_n) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1 \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} -1$, deci f nu are limită la ∞ ¹⁾.

(ii) Fie șirul $(x_n)_n$ de termen general $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Rezultă că $x_n \rightarrow \infty$ și $f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$, divergent, de unde aceeași concluzie.

La aceeași concluzie, a inexistenței limitei la ∞ , se ajunge folosind funcția cosinus, funcția tangentă (definită pe mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$), sau funcția cotangentă (pe mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\}$).

O generalizare imediată este următoarea: *orice funcție periodică, neconstantă* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nu admite limită la ∞ . Într-adevăr, dacă $T > 0$ este perioada și dacă $a = f(\alpha)$ și $b = f(\beta)$ sunt două valori diferite ale funcției, atunci utilizarea șirurilor de termen general $x'_n = \alpha + nT$ și $x''_n = \beta + nT$ conduce la concluzia enunțată.

Toate rezultatele menționate se transpun fără nicio dificultate pentru limita la $-\infty$.

6. O funcție care nu admite limite laterale (și deci nici limită) în 0

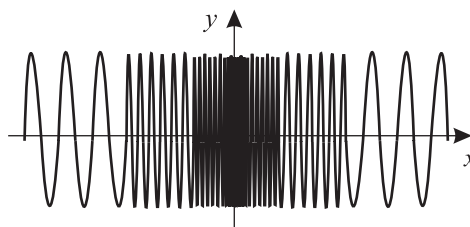


Fig. 1

Este funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ (o schiță a

graficului este redată în fig. 1).

Funcția nu admite limite laterale în punctul $x = 0$, ceea ce se poate obține utilizând, de asemenea, caracterizarea cu șiruri a limitelor (laterale) ale unei funcții într-un punct.

De exemplu, pentru a arăta că funcția nu are limită la dreapta în 0, se pot utiliza șirurile de termen general $x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$ și $x''_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + n\pi}$; desigur $x'_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, dar $x'_n \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0$, analog și pentru $(x''_n)_n$, dar

¹⁾Se pot alege și alte șiruri, de exemplu $x'_n = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, împreună cu $x''_n = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi$. (N.A.)



$f(x'_n) = 1 \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 1$, în timp ce $f(x''_n) = -1 \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} -1$. Se poate lucra și

cu un singur șir, de exemplu $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$ etc. Pentru a arăta că funcția

nu are limită la stânga în punctul 0, se procedează analog, folosindu-se, de exemplu, șirurile de termen general $\frac{1}{\frac{\pi}{2} - 2n\pi}$ și $\frac{1}{-\frac{\pi}{2} - n\pi}$, $n \in \mathbb{N}^*$, sau numai

șirul de termen general $\frac{1}{\frac{\pi}{2} - n\pi}$ etc.

Neadmițând o limită laterală în 0, funcția nu admite nici limită (bilaterală) în acest punct. Situația din punctul $x_0 = 0$ constituie o discontinuitate de speța a doua.

7. O funcție care nu admite limite laterale (și deci nici limită) în niciun punct $x_0 \in \mathbb{R}$

Este funcția lui *Dirichlet*¹⁾ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \quad 2)$$

Stabilirea rezultatului se face apelând tot la caracterizarea cu șiruri a limitei unei funcției într-un punct. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$, oarecare.³⁾

Să considerăm un șir $(x'_n)_n$ cu toți termenii raționali (scris prescurtat: $(x'_n)_n \subset \mathbb{Q}$) cu $x'_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$,⁴⁾ dar astfel încât $x'_n \rightarrow x_0$. Atunci $f(x'_n) = 1 \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 1$. Fie acum un șir $(x''_n)_n$ cu toți termenii iraționali

$((x''_n)_n \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, cu $x''_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ⁵⁾, dar astfel încât $x''_n \rightarrow x_0$. Atunci $f(x''_n) = 0 \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0$.

¹⁾ *Peter Gustave Lejeune Dirichlet* (1805-1859), mare matematician german. (N.A.)

²⁾ Apariția funcțiilor de acest tip a avut o deosebită importanță în evoluția noțiunii de funcție, până la gradul maxim de generalitate de astăzi. În secolul al XVIII-lea și chiar la începutul secolului al XIX-lea, încă se mai considera că orice funcție numerică trebuie să fie legată de o expresie analitică, de o formulă. De abia ulterior s-a degajat definiția cea mai generală a funcției, care cere doar ca, la orice element din domeniul de definiție, să corespundă un element unic din codomeniu.

Funcțiile $f(x) = \begin{cases} a, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ b, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ și $f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ h(x), & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ au căpătat denumirea de funcții de tip *Dirichlet*. (N.A.)

³⁾ Este recomandabil să se lucreze direct cu x_0 real, fără a analiza separat cazurile $x_0 \in \mathbb{Q}$, respectiv $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, care ar constitui doar o pierdere de timp. (N.A.)

⁴⁾ Dacă am ști că $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci condiția teoretică $x_n \neq x_0$ ar fi de sine îndeplinită. Dar, cum am menționat, noi lucrăm direct cu $x_0 \in \mathbb{R}$, deci condiția trebuie pusă. (N.A.)

⁵⁾ Observație asemănătoare, pentru cazul că $x_0 \in \mathbb{Q}$. (N.A.)

Deci funcția f nu admite limită în punctul x_0 . Întrucât x_0 a fost arbitrar, rezultă că funcția f nu are limită în nici un punct al axei reale. Se mai spune că f este total discontinuă. O schiță a graficului este sugerată în fig. 2.

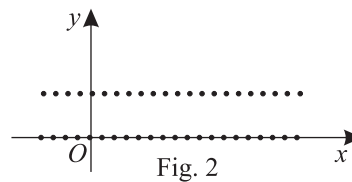


Fig. 2

De asemenea, funcția lui *Dirichlet*, fiind neconstantă și periodică (de perioadă orice număr rațional $T > 0$ (ușor verificabil!)), nu admite nici limită la $+\infty$, respectiv $-\infty$.

Ca observație metodologică utilă de reținut, subliniem încă o dată că, în toată justificarea precedentă, procedeul adoptat, de a considera direct $x_0 \in \mathbb{R}$, este mai rapid decât examinarea separată a cazurilor $x_0 \in \mathbb{Q}$ și $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Funcția precedentă mai poate servi drept exemplu și pentru alte numeroase proprietăți „negative”: nu este continuă în niciun punct, nu este derivabilă în niciun punct, nu este integrabilă *Riemann* pe niciun interval $[a, b]$ (cu $a < b$), nu are proprietatea valorilor intermediare, a lui *Darboux* pe niciun astfel de interval, nu admite primitive pe niciun interval. Totodată, întrucât $f^2 = f$, aceasta constituie și un exemplu pentru care toate proprietățile „patologice” menționate se pot transmite de la o funcție la pătratul său.

Pentru funcțiile de tip *Dirichlet*:

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ h(x), & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

se arată (folosind tot caracterizarea cu șiruri a limitei unei funcții într-un punct) că f este continuă numai în acele puncte $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care $g(x_0) = h(x_0)$, dacă astfel de puncte există (pentru funcția-prototip a lui *Dirichlet*:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

neexistând astfel de puncte). Vom utiliza o astfel de funcție la exemplul 11.

8. Funcții iraționale

Întrucât elevii sunt familiarizați încă din clasele precedente cu noțiunea de număr rațional, prezentat ca raport de două numere întregi (relativ prime)¹⁾, este firesc să se definească și noțiunea de funcție rațională ca raport

¹⁾La acel nivel, nu este încă indicată prezentarea numărului rațional ca o clasă de echivalență. (N.A.)



de polinoame, $f(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$, cu $V \neq 0$ ^{1) 2)}, desigur funcția având sens pe mulțimea $D_f \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid V(x) \neq 0\}$.

Astfel apare și cerința de a explica de ce anumite funcții nu intră în această categorie, adică nu sunt funcții raționale. În acest scop, reamintim câteva observații binecunoscute asupra funcțiilor raționale, anume:

(α) Întrucât funcția polinomială V , de la numitor, admite cel mult un număr finit de rădăcini reale distincte, $x_1 < x_2 < \dots < x_k$, mulțimea D_f este mulțimea numerelor reale, \mathbb{R} , din care s-au eliminat cel mult un număr finit de puncte, deci este o reuniune finită de intervale deschise disjuncte, adiacente:

$$D_f = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \dots \cup (x_k, \infty)$$

(subînțelegându-se că, în cazul în care V nu admite rădăcini reale, avem $D_f = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$).

(β) Funcțiile raționale sunt continue și derivabile în orice punct din domeniul de definiție D_f .³⁾

(γ) Funcțiile raționale au limite la $+\infty$ și la $-\infty$ finite și egale între ele, dacă $\text{gr}(U) \leq \text{gr}(V)$ (egale cu 0, dacă $\text{gr}(U) < \text{gr}(V)$), respectiv infinite (cu același semn sau de semne contrare) dacă $\text{gr}(U) > \text{gr}(V)$.

Prezentăm, în continuare, câteva exemple de funcții iraționale.

(a) Funcția $x \mapsto |x|$ nu este funcție rațională deoarece nu este derivabilă în origine.

(b) Funcțiile parte întreagă $x \mapsto [x]$ și parte fracționară $x \mapsto \{x\}$ nu sunt funcții raționale, deoarece nu sunt continue în punctele $x_0 = n \in \mathbb{Z}$.

(c) Funcția $x \mapsto \sqrt{x}$ nu este funcție rațională deoarece nu este definită decât pe semidreapta $[0, \infty)$.⁴⁾

(d) Funcția $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ nu este funcție rațională.

Într-adevăr, presupunând prin absurd contrariul, am avea $\sqrt{x^2 + 1} = \frac{U(x)}{V(x)}$, unde $x \mapsto U(x)$ și $x \mapsto V(x)$ sunt două funcții polinomiale, cu $V(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Rezultă:

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \frac{U(x)}{xV(x)},$$

¹⁾ Adică funcția polinomială V este diferită de funcția polinomială identic nulă. (N.A.)

²⁾ Polinoamele U și V se consideră, de asemenea, relativ prime, deci fracția $\frac{U}{V}$ este nesimplificabilă. (N.A.)

³⁾ Reamintim (dacă mai era necesar!) că, pentru funcția $x \mapsto \frac{1}{x}$, de exemplu, problema continuității în punctul $x_0 = 0$ nu are sens! Pur și simplu, f nu este definită în punctul $x_0 = 0$. (N.A.)

⁴⁾ Pentru stabilirea rezultatelor de la punctele (a) – (c) se pot da și alte argumentări, la care invităm cititorul să reflecteze. (N.A.)



unde funcția din membrul drept este, de asemenea, rațională (definită pe $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R}^*$). Considerând limitele pentru $x \rightarrow \infty$ și apoi pentru $x \rightarrow -\infty$, obținem pentru funcția din membrul stâng valorile 1, respectiv -1 , ceea ce nu poate avea loc pentru funcția rațională din membrul drept. Contradicție! ¹⁾

(e) Funcția $x \mapsto \ln x$ nu este funcție rațională, deoarece nu este definită decât pe intervalul $(0, \infty)$.

(f) Funcția $x \mapsto e^x$ nu este funcție rațională, din cauza situației limitelor la $+\infty$, respectiv $-\infty$.

Propunem acum cititorului să stabilească – folosind metode asemănătoare – că următoarele funcții definite pe \mathbb{R} nu sunt funcții raționale:

$$f(x) = \operatorname{arctg}x, \quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

9. O sumă de fracții raționale $\sum_{k=1}^n a_k \left(a_k = \frac{p(k)}{q(k)} \right)$, care nu se poate restrânge ca funcție rațională de n (după [25])

Să considerăm întâi, ca exemplu introductiv, formula binecunoscută:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \left(= \frac{n}{n+1} \right).$$

Ea oferă „restrângerea“ sumei de funcții raționale de forma $\frac{1}{k(k+1)}$ (cu $k = 1, 2, 3, \dots, n$) sub forma tot a unei funcții raționale, în variabila n , anume $\frac{n}{n+1}$.

O astfel de „restrângere“ nu mai este posibilă pentru alte sume, ca, de exemplu, pentru suma armonică:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Dar această simplă afirmație, neînsoțită de nicio explicație, de nicio justificare, este nesatisfăcătoare! Se poate însă demonstra

Teorema 1. *Nu există nicio funcție rațională cu coeficienții reali $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ (unde $\mathbb{N}^* \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$), astfel încât:*

$$H_n = f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (9.1)$$

Demonstrație. Să presupunem, prin absurd, că ar exista o astfel de funcție f ; aceasta ar însemna că există două funcții polinomiale $U, V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$U(x) = a_p x^p + \dots + a_0, \quad V(x) = b_q x^q + \dots + b_0,$$

¹⁾Toate exemplele (a) – (d), cât și demonstrațiile respective au fost adaptate din [9], pag. 62-63. (N.A.)



cu $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$, $V(x) \neq 0$, pentru orice $x \in E$ ¹⁾, astfel încât:

$$f(x) = \frac{U(x)}{V(x)}, \quad \forall x \in E. \quad (9.2)$$

Cu această notație, egalitatea (9.1) s-ar scrie:

$$H_n = \frac{U(n)}{V(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (9.3)$$

Trecând la limită pentru $n \rightarrow \infty$ și ținând seama că $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \infty$, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U(n)}{V(n)} = \infty$. Deci $p > q$, adică $p - q > 0$, sau, cum $p, q \in \mathbb{N}$, avem $p - q \geq 1$. Împărțim egalitatea (9.3) prin n^{p-q} și găsim:

$$\frac{H_n}{n^{p-q}} = \frac{U(n)}{n^{p-q}V(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (9.4)$$

unde, în membrul drept, funcțiile polinomiale de la numărător și de la numitor au același grad, p , iar coeficienții lor dominanți sunt a_p , respectiv b_q .

Trecând acum la limită pentru $n \rightarrow \infty$, în relația (9.4) se obține $0 = \frac{a_p}{b_q}$ ²⁾.

Contradicție!

Pe o cale asemănătoare, se demonstrează că nu există nicio funcție rațională cu coeficienți reali $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{N}^* \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$), astfel încât să avem:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(pentru detalii, a se vedea [25]).

10. Dacă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$ cu $a < b$, este bijectivă, atunci aceasta nu este funcție rațională

Într-adevăr, să presupunem, prin absurd, că f este o funcție rațională $f(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (și, desigur, $V(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$). Întrucât, funcția f este injectivă și continuă, ea va rezulta, în baza unui rezultat binecunoscut (v. [11], cap II, §2), că f este strict monotonă. În acest caz, în baza altui rezultat binecunoscut, ar avea loc una din următoarele situații:

I. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, dacă f este strict crescătoare;

¹⁾În cazul particular $E = \mathbb{R}$, ultima condiție revine la faptul că funcția polinomială V admite numai rădăcini complexe. (N.A.)

²⁾Obținerea rezultatului $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{n^r} = 0$ (cu notația $r = p - q$, deci $r \geq 1$) este binecunoscută; ea se poate baza, de exemplu, pe egalitatea $\frac{H_n}{r} = \frac{H_n}{n} \cdot \frac{1}{n^{r-1}}$ (unde $r - 1 \geq 0$), iar limita primului factor din membrul drept poate fi găsită cu lema lui *Stolz*. (N.A.)



II. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, dacă f este strict descrescătoare.

În ambele cazuri, limitele la $-\infty$ și la ∞ sunt finite și diferite între ele, ceea ce contrazice situația limitelor la $-\infty$ și la $+\infty$ pentru o funcție rațională. Așadar, f nu este o funcție rațională.

*

* *

Această delimitare prezintă un anumit interes teoretic în stabilirea echivalenței cardinale ¹⁾ dintre mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale și un interval oarecare (a, b) (cu $a < b$)²⁾, care poate fi ales ca fiind intervalul „standard“ $(0, 1)$, sau intervalul $(-1, 1)$ ³⁾. Astfel, bijecții f de la \mathbb{R} la $(-1, 1)$, sunt $f(x) = \frac{2}{\pi} \arctg x$, $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (funcția numită și „tangentă hiperbolică“ notată $th\ x$), $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}}{2}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$, $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ (propunem cititorului studiul și reprezentarea grafică). Dar, în orice carte de analiză matematică, este în ordinea firească a lucrurilor ca, întâi să se prezinte și să se analizeze mulțimea \mathbb{R} , a numerelor reale („materia primă“ a analizei matematice⁴⁾), iar de abia mai târziu să se treacă la definirea riguroasă a funcțiilor mai complicate decât modulul (absolut necesar de a fi definit la început, fiind folosit la descrierea distanței pe \mathbb{R} !), funcțiile polinomiale și funcțiile raționale (ne referim la funcțiile radical, exponențială, logaritmic, funcțiile trigonometrice și inversele lor). Astfel, dintre toate cele cinci funcții bijective $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ prezentate anterior, va fi de preferat cea mai „simplă“, adică ultima $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$. Rezultatul demonstrat anterior ne arată că procesul de selectare a unei funcții și mai „simple“, prin renunțarea la modul, nu mai poate continua: nu putem găsi o funcție bijectivă $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, care să fie rațională! (Este interesant de notat că,

¹⁾ Reamintim că două mulțimi A și B se numesc cardinal echivalente, dacă există o funcție bijectivă $f : A \rightarrow B$. Relația astfel definită este o relație de echivalență în cadrul mulțimilor. Noțiunea a fost introdusă de *Georg Cantor* (1845 - 1918). (N.A.)

²⁾ Ambele mulțimi \mathbb{R} și (a, b) sunt nenumărabile. Reamintim că o mulțime cardinal echivalentă cu mulțimea \mathbb{N} , a numerelor naturale, se numește mulțime numărabilă, mulțimile \mathbb{Z} și \mathbb{Q} sunt, de asemenea, mulțimi numărabile. O mulțime care nu este cardinal echivalentă cu mulțimea \mathbb{N} se numește mulțime nenumărabilă. Tot mulțimi nenumărabile mai sunt $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și \mathbb{C} . O mulțime cardinal echivalentă cu mulțimea \mathbb{R} , a numerelor reale, se numește mulțime de puterea continuului. (N.A.)

³⁾ Alegerea intervalului „standard“ $(0, 1)$ sau a intervalului $(-1, 1)$ nu micșorează cu nimic generalitatea, deoarece între oricare două intervale deschise (a, b) și (α, β) (cu $a < b$ și $\alpha < \beta$) se poate stabili o bijecție, de exemplu funcția de gradul I care transformă pe a în α și pe b în β . (N.A.)

⁴⁾ Expresie preluată din [6]. (N.A.)

invers, de la $(-1, 1)$ la \mathbb{R} , găsim cu ușurință bijecții raționale, de exemplu $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{1-x^2}$.)

11. O funcție $f : I \rightarrow I$, $I = [0, 1]$, cu $f(I) = I$, dar care nu are proprietatea lui Darboux (după [11])

Este o funcție de tip *Dirichlet* $f : I \rightarrow I$ ($I = [0, 1]$):

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{pentru } x \in \mathbb{Q} \cap I \\ x^2, & \text{pentru } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap I. \end{cases}$$

Se obține ușor, cu o demonstrație prin dublă incluziune, că are loc egalitatea $f(I) = I$ (la stabilirea ambelor incluziuni, se vor considera separat cazurile când se lucrează cu valori raționale, respectiv iraționale).

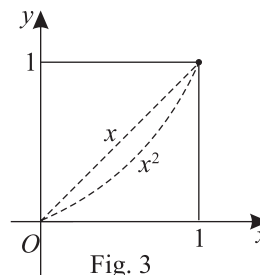


Fig. 3

Se poate însă arăta acum că funcția f nu are proprietatea lui *Darboux*.

Într-adevăr, pentru a face o alegere convenabilă, fie $x_1 = \frac{1}{4}$, iar $x_2 = \frac{1}{2}$; avem $x_1 < x_2$. Să considerăm acum o valoare irațională, din intervalul „de pe axa Oy “ $(f(x_1), f(x_2)) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, de exemplu, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{7}}$. Căutăm un număr

$c \in (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, „de pe axa Ox “, astfel încât să avem $f(c) = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Numărul c nu poate fi rațional, deoarece, în acest caz, am avea $f(c) = c \in \mathbb{Q}$, deci $f(c) \neq \lambda$. Așadar c trebuie să fie irațional. În acest al doilea caz, am avea $f(c) = c^2$, deci, din condiția $f(c) = \frac{1}{\sqrt{7}}$, rezultă că trebuie să alegem

$c = \frac{1}{\sqrt[4]{7}}$. Însă $\frac{1}{\sqrt[4]{7}} > \frac{1}{2}$, deci $c \notin (x_1, x_2)$. Așadar, nu există niciun număr real $c \in (x_1, x_2)$, astfel încât $f(c) = \lambda$, deci funcția f nu are proprietatea lui *Darboux*.

Contraexemplul prezentat ne arată că, pentru o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (unde I este un interval), satisfacerea proprietății lui *Darboux* nu este echivalentă cu transformarea unui anumit interval $I_1 \subseteq I$ ¹⁾ tot într-un interval. Proprietatea lui *Darboux* este echivalentă cu transformarea oricărui interval $I_1 \subseteq I$ tot într-un interval. Menționăm că, în unele cărți de analiză matematică, această din urmă proprietate este luată tocmai drept definiție a proprietății lui *Darboux* (a se vedea [4], pag. 136).

¹⁾În contraexemplul prezentat, avem chiar $I_1 = I = [0, 1]$ ceea ce nu joacă un rol esențial, deoarece funcția putea fi definită și pe un interval J , astfel încât $J \supset [0, 1]$. (N.A.)