Etapa 7, Problema 3

a) Fie $\mathcal{M}$ o mulţime de şase puncte, alese arbitrar dintre cele opt puncte ale spaţiului care au coordonatele de forma $(\pm1, \pm1, \pm1)$. Demonstraţi că există trei puncte în $\mathcal{M}$ care sunt vârfuri ale unui triunghi echilateral.

b) Fie $\mathcal{M}$ o mulţime având mai mult de $\frac{2^{n+1}}{n}$ puncte, alese arbitrar dintre cele 2^n puncte ale spaţiului n-dimensional care au coordonatele de forma $(\pm1, \pm1, ..., \pm1)$. Demonstraţi că există trei puncte în $\mathcal{M}$ care sunt vârfuri ale unui triunghi echilateral.

(Distanţa dintre două puncte $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ şi $B(b_1, b_2, ..., b_n)$ ale spaţiului n-dimensional se calculează cu formula

$$AB = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + ... + (a_n - b_n)^2}.)$$

Putnam Competition (prelucrare)

Soluţie.

a) Fie $\mathcal{S}$ mulţimea celor opt puncte ale spaţiului care au coordonatele de forma $(\pm1, \pm1, \pm1)$. Pentru fiecare punct $P \in \mathcal{M}$ considerăm mulţimea $\mathcal{S}_P$ a punctelor din $\mathcal{S}$ ale căror coordonate diferă de cele ale lui P pe exact o componentă. Evident, mulţimile $\mathcal{S}_P$ sunt de cardinal 3, oricare ar fi $P \in \mathcal{M}$. Suma cardinalelor mulţimilor $\mathcal{S}_P$ este 18, mai mult decât dublul cardinalului lui $\mathcal{S}$. Conform principiului cutiei, va exista un punct din $\mathcal{S}$ care se află în măcar trei mulţimi de tip $\mathcal{S}_P$, altfel spus există trei puncte P, Q, $R \in \mathcal{M}$ ale căror coordonate diferă pe exact două poziţii. Triunghiul PQR este echilateral de latură $2\sqrt{2}$, fapt care justifică cerinţa problemei.

b) Urmărim întocmai soluţia de la punctul a).