SOLUŢIE

Problema 4

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

1°) $f(1) = 1$;

2°) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$;

3°) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$.

Arătaţi că $f\left(\sqrt{2022}\right) = \sqrt{2022}$.

***

Soluţie. Făcând $x = y = 0$ în 2°), obţinem $f(0) = f(0) + f(0)$, deci $f(0) = 0$, iar pentru $y = -x$ obţinem $f(0) = f(x) + f(-x)$, deci $f(-x) = f(x)$, adică f este funcţie impară. Atunci are loc

4°) $f(x_1 - x_2) = f(x_1) + f(-x_2) = f(x_1) - f(x_2)$, pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, conform cu $1°, 2°, 3°$ şi $4°$, avem:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{1-x}\right) &= f\left(1 + \frac{x}{1-x}\right) = f(1) + f\left(\frac{x}{1-x}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{\frac{1-x}{x}}\right) = \\
&= 1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{x}\right) = 1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \cdot \left(f\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) = \\
&= 1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} f(x) - 1\right) = 1 - \frac{x^2}{(1-x)^2} + \frac{f(x)}{(1-x)^2} = \\
&= \frac{1 - 2x + f(x)}{(1-x)^2}. \quad (\star)
\end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot f(1-x) = \frac{f(1) - f(x)}{(1-x)^2} = \frac{1 - f(x)}{(1-x)^2} \quad (\star\star).$$

Comparând $(\star)$ cu $(\star\star)$, obţinem $f(x) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, prin urmare $f\left(\sqrt{2022}\right) = \sqrt{2022}$.