Etapa 1, Problema 2

Un ceas defect arată ora 12:00. Din acest moment, acul orar se deplasează cu a° într-o oră, iar acul minutar cu b° într-o oră, unde $a, b > 0$.

a) Dacă $a, b \in \mathbb{Q}$, demonstrați că există un număr natural nenul n astfel încât cele două ace ale ceasului să se suprapună exact după n ore.

b) Dacă $a \in \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, demonstrați că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, acele ceasului nu vor fi suprapuse după n ore.

Mihai Monea și Steluța Monea

Soluție.

Unghiul descris de acul orar după n ore are măsura na°, iar cel descris de acul minutar are măsura nb°. Pentru ca cele două ace să se suprapună trebuie ca, la un moment dat, diferența $na^\circ - nb^\circ$ să fie multiplu de 360°, adică trebuie să existe $k \in \mathbb{Z}$ pentru care $na - nb = 360k$.

a) Dacă $a, b \in \mathbb{Q}$, există $p, q, r, s \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a = \frac{p}{q}$ și $b = \frac{r}{s}$. Atunci $a - b = \frac{ps - qr}{qs}$, deci $qs(a-b) \in \mathbb{Z}$. Rezultă că $360qs(a-b)$ este divizibil cu 360, adică am putea alege $n = 360qs$.

b) Dacă $a \in \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, egalitatea $na - nb = 360k$ nu este posibilă deoarece $nb \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, în timp ce na și $360k$ sunt raționale.