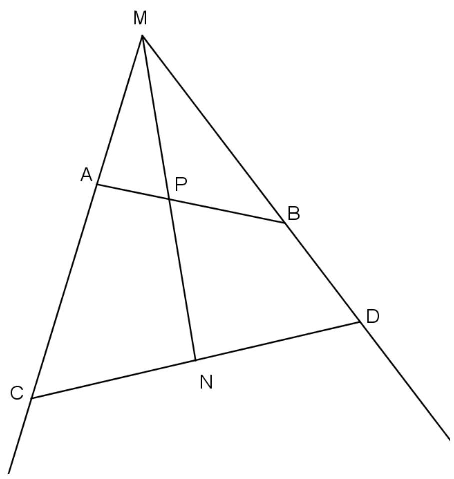
Problemă. Într-un plan π se dau două puncte fixe A şi B şi un punct mobil M. Pe semidreptele $(MA$ şi $(MB$ se iau punctele C respectiv D, astfel încât $MC = p \cdot MA$ şi $MD = q \cdot MB$, unde p, q sunt două numere reale, pozitive, date.

Arătaţi că dreapta care uneşte punctul M cu mijlocul lui $[CD]$, intersectează dreapta AB într-un punct fix P.

* * *

Soluţie



Din ipoteză avem

$$\overrightarrow{MC} = p \cdot \overrightarrow{MA} \qquad \overrightarrow{MD} = q \cdot \overrightarrow{MB} \qquad (1).$$

Dacă N este mijlocul lui $[CD]$ atunci

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}}{2} \qquad (2).$$

Înlocuind în (2) cu relaţiile de la (1) obţinem

$$\overrightarrow{MN} = \frac{p \cdot \overrightarrow{MA} + q \cdot \overrightarrow{MB}}{2} \qquad (3).$$

Acum, dacă $\{P\} = MN \cap AB$ notăm $\dfrac{AP}{PB} = k$. Cu aceasta

$$\overrightarrow{MP} = \frac{\overrightarrow{MA} + k \cdot \overrightarrow{MB}}{1+k} \qquad (4).$$

Deoacrece $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{MP}$ sunt vectori coliniari putem scrie

$$\overrightarrow{MN} = m \cdot \overrightarrow{MP} \qquad (5).$$

Cu (3) şi (4) relaţia (5) devine

$$\frac{p \cdot \overrightarrow{MA} + q \cdot \overrightarrow{MB}}{2} = m \cdot \frac{\overrightarrow{MA} + k \cdot \overrightarrow{MB}}{1+k} \qquad (6).$$

Deoarece vectorii $\overrightarrow{MA}$ şi $\overrightarrow{MB}$ sunt liniar independenţi avem

$$\frac{p}{2} = \frac{m}{1+k}$$

$$\frac{q}{2} = \frac{mk}{1+k}.$$

Împărţind cele două relaţii obţinem

$$k = \frac{q}{p}.$$

Ultima relaţie arată că raportul în care punctul P împarte segmentul AB este constant.

Aşadar, punctul P este fix.