Ioan-Andrei Nicolae
clasa a IX-a, ICHB

Problema 3

a) Arătați că mulțimea $A = \{a - b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = -1\}$ este infinită

b) Arătați că există o infinitate de numere naturale n pentru care $\frac{n(n+1)}{2}$ este pătrat perfect.

Soluție: a) Presupunem că există $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ cu $(a, b) \neq (c, d)$ astfel încât

$a - b\sqrt{2} = c - d\sqrt{2}$.

$\Leftrightarrow a - c = \sqrt{2}(b - d)$

Dacă $b - d \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a-c}{b-d} \in \mathbb{Q}$ (fals)

$\Rightarrow b - d = 0 \Rightarrow b = d$ și $a = c \Rightarrow (a, b) = (c, d)$ contradicție.

$\Rightarrow$ este suficient să demonstrăm că $a^2 - 2b^2 = -1$ are o infinitate de soluții în numere naturale.

Dacă $(x_n, y_n) \in \mathbb{N}^2$ este soluție pentru ecuația $x^2 - 2y^2 = 1$ atunci $(x_n + 2y_n, x_n + y_n)$ este soluție pentru ecuația $a^2 - 2b^2 = -1$.

$\Rightarrow$ este suficient să demonstrăm că $x^2 - 2y^2 = 1$ are o infinitate de soluții în numere naturale.

Dacă $(x_n, y_n) \in \mathbb{N}^2$ este soluție pentru $x^2 - 2y^2 = 1$ atunci și $(3x_n + 4y_n, 2x_n + 3y_n)$ este soluție pentru că:

$(3x_n + 4y_n)^2 - 2(2x_n + 3y_n)^2 = 9x_n^2 + 16y_n^2 + 24x_ny_n - 8x_n^2 - 18y_n^2 - 24x_ny_n$

$= x_n^2 - 2y_n^2 = 1$

$\Rightarrow$ (plecând de la soluția $(3, 2)$) obținem o infinitate de soluții pentru $x^2 - 2y^2 = 1$

$\Rightarrow$ A infinită

b) Continuare problema 3:

Demonstrăm că există o infinitate de soluții dacă n impar

Fie $n = 2x - 1$, $x \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2x-1)\cdot 2x}{2} = x(2x-1) = k^2,\ k \in \mathbb{N}$$

dar $(x, 2x-1) = 1$ $\Bigg\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ x, $2x-1$ pătrate perfecte

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a^2, & a \in \mathbb{N} \Rightarrow 2x = 2a^2 \\ 2x - 1 = b^2, & b \in \mathbb{N} \end{cases} \Bigg\} \Rightarrow b^2 - 2a^2 = -1$$

Conform punctului a) ecuația $b^2 - 2a^2 = -1$ are o infinitate de soluții în numere naturale

$\Rightarrow$ există o infinitate de valori ale lui n pentru care $\frac{n(n+1)}{2}$ pătrat perfect.