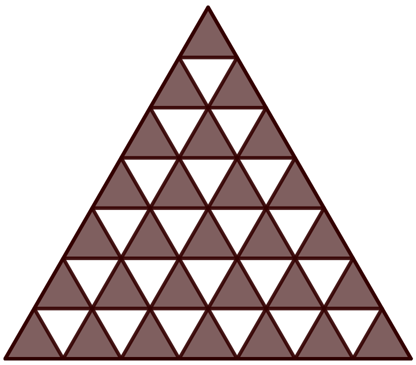
Problema 4. Fiecare latură a unui triunghi echilateral este împărţită în n segmente egale şi prin capetele acestor segmente se duc paralele la laturile triunghiului. Suprafaţa triunghiului este împărţită de aceste drepte în n^2 triunghiuri echilaterale micuţe, congruente între ele.
Spunem despre o succesiune de asemenea triunghiuri micuţe că formează un *lanţ* dacă niciun triunghi nu apare mai mult de o dată şi fiecare triunghi din succesiune, începând cu cel de-al doilea, are o latură în comun cu triunghiul precedent.
Care este numărul maxim de triunghiuri pe care îl poate avea un lanţ?

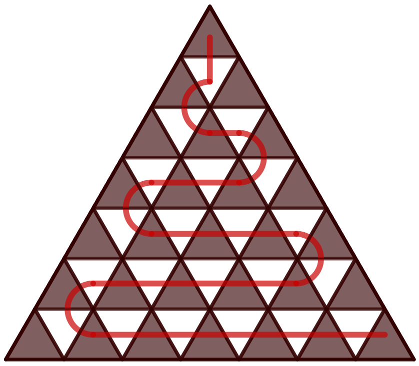
Mihail Serov, Olimpiada Colorado

Soluţie:
Observăm că toate triunghiurile echilaterale micuţe care se formează au o latură orizontală. Aceste triunghiuleţe sunt de două tipuri: unele care au un al treilea vârf deasupra laturii orizontale şi altele care au al treilea vârf sub latura orizontală. Pentru o mai bună vizualizare, în exemplul de mai jos (pentru $n = 7$) am făcut negre triunghiurile din primul tip, iar triunghiurile de al doilea tip le-am lăsat albe.



De asemenea, dreptele orizontale trasate împart triunghiul echilateral în n fâşii. Cea mai de sus este formată dintr-un triunghi micuţ, a doua din 3 triunghiuri micuţe, următoarea din 5, ş.a.m.d, ultima fâşie fiind formată din $2n-1$ triunghiuri micuţe. În fiecare fâşie, triunghiurile micuţe cu vârful în sus vor alterna cu cele având vârful în jos, primul şi ultimul triunghi din fiecare fâşie având vârful în sus. Aşadar, vom avea $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ triunghiuri micuţe cu vârful în sus şi $0+1+2+\ldots+(n-1) = \dfrac{(n-1)n}{2}$ triunghiuri micuţe cu vârful în jos. Două triunghiuri care au o latură comună vor fi unul cu vârful în sus şi unul cu vârful în jos, deci orice lanţ va consta dintr-o succesiune de triunghiuri micuţe, succesiune în care triunghiurile cu vârful în sus vor alterna cu cele având vârful în jos. Având numai $\dfrac{(n-1)n}{2}$ triunghiuleţe cu vârful în jos, cel mai lung lanţ va putea avea cel mult $2 \cdot \dfrac{(n-1)n}{2} + 1 = n^2 - n + 1$ triunghiuri micuţe.

Pe de altă parte, un lanţ de lungime $n^2 - n + 1$ chiar se poate construi. Se pleacă din vârful de sus. Se coboară în triunghiuleţul mijlociu al celei de-a doua fâşii. Se merge până în capăt şi se coboară în al doilea (sau penultimul, depinde de unde numărăm) triunghi de pe fâşia următoare. Se merge la celălalt capăt şi se coboară în penultimul (sau al doilea) triunghiuleţ al fâşiei următoare. Exemplul descris mai sus, ilustrat în cazul $n = 7$:



Acest lanţ ratează câte un triunghi din fiecare fâşie cu excepţia primeia, adică ratează $n - 1$ triunghiuri micuţe din cele n^2. Aşadar, acest lanţ conţine $n^2 - n + 1$ triunghiuri micuţe, prin urmare lanţul cel mai lung are $n^2 - n + 1$ triunghiuri micuţe.