NUMERELE LUI CATALAN

REZUMAT. Această lecție se dorește o scurtă introducere în teoria numerelor lui Catalan.
Tema se adresează elevilor clasei a X-a.
AUTORI: Mihai Monea & Steluța Monea, Profesori, Colegiul Național „Decebal”, Deva.

1. INTRODUCERE. În această lecție vom face o scurtă introducere în teoria numerelor lui Catalan, evidențiind câteva aspecte teoretice, precum și unele aplicații. Recomandăm tuturor elevilor care citesc acest material să consulte una dintre lucrările [1] sau [2] din bibliografie pentru mai multe detalii. Cei care doresc să se antreneze, pot rezolva problemele propuse în [3].

Vom începe cu următoarea

Teorema 1.1. (Hermite) *Fie* $m,n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n$. *Atunci* $\frac{m-n+1}{(m+1,n)}$ *divide numărul* C_m^n, *unde* (a,b) *simbolizează cel mai mare divizor comun al numerelor* a *și* b.

Demonstrație. Fie $d=(m+1,n)$; există atunci $p,r \in \mathbb{Z}$ astfel încât $d=p(m+1)+rn=$ $=p(m-n+1)+r(l+k)$. De aici, $d \cdot \frac{m!}{n!(m-n+1)!}=pC_m^n+rC_m^{n-1}$, ceea ce este echivalent cu $dC_m^n=(m-n+1)(pC_m^n+rC_m^{n-1})$. Cum d divide $m-n+1$, obținem că $C_m^n=\frac{m-n+1}{d}(pC_m^n+rC_m^{n-1})$, de unde concluzia. □

Alegând $m=2n$ și observând că $(2n+1,n)=1$, obținem următorul

Corolarul 1.2. *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$, *numărul* $n+1$ *divide numărul* C_{2n}^n.

2. NUMERELE LUI CATALAN. Numerele pe care le vom defini în continuare au apărut ca o consecință a rezolvării unor probleme de combinatorică. Numele provine de la matematicianul belgian **Eugene Charles Catalan** (1814 – 1894). Acesta le-a obținut în încercarea de a rezolva o problemă legată de distribuția parantezelor la înmulțire, făcând observațiile din tabelul următor:

$n=0$	(a)	1 mod
$n=1$	(a · b)	1 mod
$n=2$	((a · b) · c), (a · (b · c))	2 moduri
$n=3$	(((a · b) · c) · d), ((a · b) · (c · d)), ((a · (b · c)) · d), (a · ((b · c) · d)), (a · (b · (c · d)))	5 moduri
$n=4$	((((a · b) · c) · d) · e), (((a · b) · c) · (d · e)), (((a · b) · (c · d)) · e), ((a · b) · ((c · d) · e)), ((a · b) · (c · (d · e))), (((a · (b · c)) · d) · e), ((a · (b · c)) · (d · e)), ((a · ((b · c) · d)) · e), ((a · (b · (c · d))) · e), (a · (((b · c) · d) · e)), (a · ((b · c) · (d · e))), (a · ((b · (c · d)) · e)), (a · (b · ((c · d) · e))), (a · (b · (c · (d · e))))	14 moduri

Definiția 2.1. *Numerele* $C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$, $n \in \mathbb{N}$ *se numesc numerele lui Catalan.*

Conform Corolarului 1.2, definiția generează numere naturale. Primele numere din acest şir sunt :

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796,....

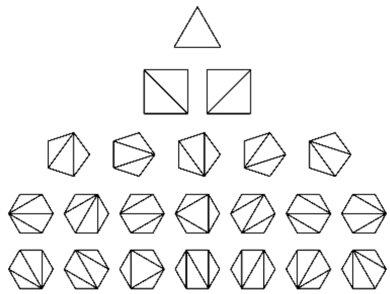
Catalan nu a fost primul care a întâlnit aceste numere. Se pare că întâietatea revine matematicianului chinez Ming, care ar fi scris un articol în jurul anului 1730, rămas însă necunoscut în Europa, fiind publicat în limba chineză. Mult mai cunoscut este rezultatul obținut în 1751 de către L. Euler în încercarea de a rezolva următoarea problemă:

Problema 2.2. *Câte posibilități de triangularizare a unui poligon convex cu* n *laturi există?*

Imaginea alăturată ne conduce spre ideea că se obțin aceleaşi numere ca în problema studiată de Catalan. Mai mult, în 1761 Euler a prezentat o soluție prin inducție, demonstrând următoarea formulă:

$$T_{n+2} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-2)}{(n+1)!},\ n \in \mathbb{N}^*,$$

(unde T_n reprezintă numărul de triangularizări).



Se verifică egalitățile $C_1 = T_3$, $C_2 = T_4$ şi mai general $C_n = T_{n+2}$.

De-a lungul anilor, numerele lui Catalan au devenit extrem de importante nu numai în combinatorică, ci şi în informatică. De aceea, vom prezenta în continuare câteva rezultate cu caracter algebric, a căror justificare o lăsăm în seama cititorilor.

Propoziția 2.3. *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *are loc relația* $C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} C_n$.

Propoziția 2.4. *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$ *are loc relația* $C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$.

Propoziția 2.5. *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$ *are loc relația* $C_n = 2C_{2n}^n - C_{2n+1}^n$.

Propoziția 2.6. *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$ *are loc relația* $C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + C_2 C_{n-3} + \ldots + C_{n-1} C_0$.

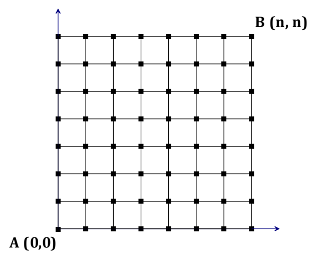
Propoziția 2.4 este extrem de utilă pentru realizarea unei construcții grafice care să permită calculul numerelor lui Catalan. Se utilizează numai liniile corespunzătoare lui n par din triunghiul lui Pascal. Practic, din elementul central al liniei se scade valoarea elementului din stânga sa.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
\boxed{1} \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad \boxed{4} \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad \boxed{15} \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad \boxed{56} \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}
$$

De exemplu, dacă utilizăm linia corespunzătoare lui $n=8$, obținem $C_4 = 70-56=14$.

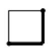
3. O APLICAȚIE A NUMERELOR LUI CATALAN. În acest paragraf vom prezenta o problemă de numărare care conduce la numerele lui Catalan şi vom indica alte câteva exemple, fără demonstrații.

Problema 3.1. *Se consideră un oraş care are o distribuție a străzilor ca în figura alăturată. Un turist porneşte din punctul A şi trebuie să ajungă în punctul B deplasându-se doar spre nord sau est. Câte astfel de drumuri există, care să se afle de aceeaşi parte a diagonalei AB?*

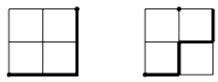


Soluție: Figura următoare ilustrează drumurile care există pentru cazurile $n=0,1,2,3$.

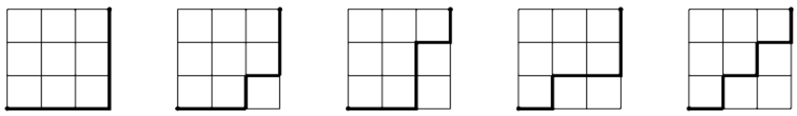
$n=0$



$n=1$

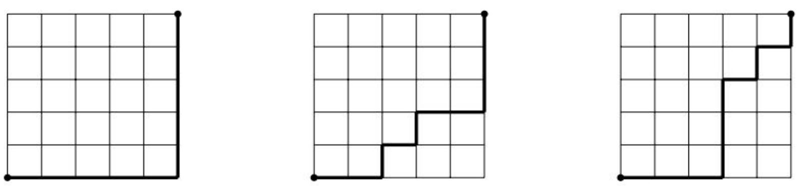


$n=2$



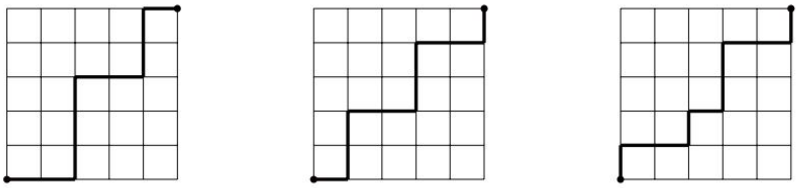
$n=3$

De asemenea putem ilustra câteva exemple pentru cazul $n=5$.



EEEEENNNNN EENENEENNN EEENNNENEN

Sub aceste drumuri am notat şi sensul de deplasare. Este evident că orice drum corect trebuie să înceapă cu o deplasare spre est şi să se finalizeze cu o deplasare spre nord, în cazul în care numărăm drumurile din partea inferioară. Figura următoare ilustrează câteva exemple de drumuri care nu corespund cerințelor problemei.



EENNNEENNE ENNEENNEEN NEENENNEEN

Acestea ne arată că în fiecare moment al deplasării, numărul paşilor făcuţi spre est trebuie să fie mai mare sau egal decât cel al paşilor făcuţi spre nord.
Deoarece numărul de paşi care trebuie făcuţi pentru a ajunge din A în B este $2n$, din care n spre est, iar n spre nord, deducem că există C_{2n}^{n} drumuri care unesc punctele A şi B. Analizăm în continuare câte drumuri invalide sunt. Orice drum invalid are un moment în care numărul de paşi parcurşi spre nord este cu 1 mai mare decât numărul de paşi spre est. Să presupunem că acesta este pasul $2k+1$; atunci avem k paşi făcuţi spre est şi $k+1$ spre nord. Mai trebuie să facem $n-k$ spre est şi $n-k-1$ spre nord. La drumul rămas schimbăm sensurile între ele, ceea ce arată că vom mai face $n-k$ paşi spre nord şi $n-k-1$ spre est. Fiind un total de $n+1$ paşi spre nord, am ieşit din oraş. Această transformare arată că există o bijecţie între numărul drumurilor invalide şi cel al drumurilor cu $n+1$ paşi spre nord, deci vor fi $C_{2n}^{n+1}=C_{2n}^{n-1}$ drumuri invalide.
Rămân $C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n-1}=C_n$ drumuri valide, adică rezultatul este dat de numerele lui Catalan. $\square$

Lăsăm rezolvarea următoarelor două probleme în seama cititorului (se poate consulta bibliografia pentru detalii).

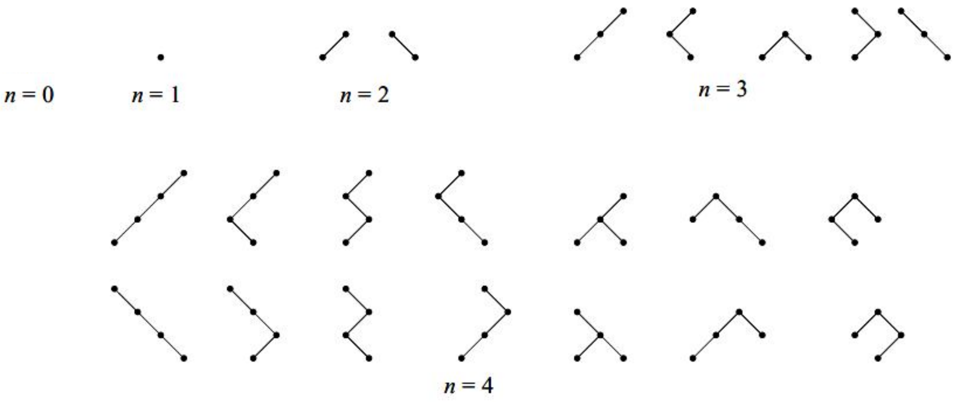
Problema 3.2. *Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi numerele naturale $x_1,x_2,...,x_n\in\{0,1,2,...,n\}$ astfel încât $x_1\le x_2\le...\le x_n$. Câte posibilităţi de alegere a acestor numere există, astfel încât să fie îndeplinită condiţia*

$$x_1+x_2+...+x_n\equiv 0\pmod{n}\ ?$$

Pentru $n=1$, avem varianta 0. Pentru $n=2$, avem 00 şi 12. Pentru $n=3$ avem 000, 013, 022, 112, 233, iar pentru $n=4$ obţinem 14 soluţii: 0000, 0014, 0023, 0113, 0122, 0244, 0334, 1112, 1144, 1234, 1333, 2224, 2233, 3444. Se demonstrează că numărul de soluţii este C_n (vezi pag 289 din [1]). $\square$

Problema 3.3. *Determinaţi numărul de arbori binari formaţi cu n noduri.*

Cei mai puţin familiarizaţi cu această noţiune pot consulta adresa http://ro.wikipedia.org/wiki/Arbore_binar. Soluţia riguroasă a problemei se găseşte la pag. 230 din [1]. Figura următoare descrie primele cazuri particulare:



Se arată că numărul arborilor binari cu n noduri este C_n. $\square$

BIBLIOGRAFIE

[1] T. KOSHY, *Catalan Numbers with Applications*, Oxford University Press, 2009.
[2] R. STANLEY, *Enumerative Combinatorics*, Cambridge University Press, 1997.
[3] Y. ZHAO, *Combinatorics*, Winter Camp 2008.