Clasa a X-a - Etapa 2 - Problema 2

Enunţ. *Fie* $x, y \in (1, 2]$. *Demonstraţi că*

$$\log_x(3y-2) + \log_y(3x-2) \geq 4.$$

Soluţie. Cum $x \in (1,2]$, atunci $(x-1)(2-x) \geq 0$, de unde $3x-2 \geq x^2$. Analog se arată că $3y-2 \geq y^2$.

Baza fiind supraunitară, obţinem că

$$\log_x(3y-2) \geq \log_x y^2 = 2\log_x y,$$

iar

$$\log_y(3x-2) \geq \log_y x^2 = 2\log_y x.$$

Întrucât $\log_x y > 0$ şi $\log_y x > 0$, putem aplica inegalitatea mediilor:

$$\log_x y + \log_y x \geq 2\sqrt{\log_x y \log_y x} = 2,$$

de unde se obţine concluzia problemei. □