

### Clasa a X-a - Etapa a V-a - Problema 3

**Enunț.** Fie un alfabet constituit din trei simboluri  $a, b, c$ . Demonstrați că numărul de cuvinte de lungime  $n$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ , care se pot scrie cu acest alfabet astfel încât simbolul  $a$  are un număr par (nenul) de apariții este

$$\frac{1}{2} (3^n + 1 - 2^{n+1}).$$

*Soluție.* Fie  $k \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât numărul de apariții ale simbolului  $a$  este  $2k$ . Atunci sunt ocupate  $C_n^{2k}$  poziții. Pentru restul pozițiilor mai rămân  $2^{n-2k}$  moduri de completare.

Numărul de cuvinte este

$$\sum_{k \geq 1} C_n^{2k} \cdot 2^{n-2k},$$

de unde se obține concluzia problemei. □