Problema 2. Demonstrați că numerele $2015^{2015^{2015}}$ și 2015^{2015} au aceleași ultime 4 cifre.

Răzvan Ceuca, Iași

Rezolvare: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \Rightarrow 2015^2=(2000+15)^2=\underbrace{2000^2+4000\cdot 15}_{\vdots 10000}+\boxed{225}$
$= M_{10000}+225$

$2015^3=(M_{10000}+225)(2000+15) = \underbrace{M_{10000}+225\cdot 2000}_{\vdots 10000}+3375 = M_{10000}+\boxed{3375}$

$2015^4=(M_{10000}+225)^2 = M_{10000}+50625 = M_{10000}+\boxed{625}$

$2015^5=(M_{10000}+225)(M_{10000}+3375) = M_{10000}+759375 = M_{10000}+\boxed{9375}$

$2015^6=(M_{10000}+625)(M_{10000}+225) = M_{10000}+140625 = M_{10000}+\boxed{625}$.

Cum $625\cdot 225 = 14\underline{0625}$, ultimele 4 cifre rămân 0625 $\Rightarrow$ Toate puterile 2015^{2k}, $k\geq 2$, vor avea ultimele 4 cifre 0625.

$2015^7=(M_{10000}+9375)(M_{10000}+225) = M_{10000}+2109375 = M_{10000}+\boxed{9375}$.

Cum $9375\cdot 225 = 210\underline{9375}$, ultimele 4 cifre rămân 9375 $\Rightarrow$ Toate puterile 2015^{2k+1}, $k\geq 2$, vor avea ultimele 4 cifre 9375.

Cum 2015^{2015} și 2015 sunt nr impare $\Rightarrow$ Puterile $2015^{2015^{2015}}$ și 2015^{2015} au ultimele 4 cifre identice 9375.

Ichim Alexia
cls a VI-a
C. N. I. T. V.