Problema 3
Etapa 3
Clasa a X-a

Problema 3. Determinați toate funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f\left(f\left(x\right)+y\right)=2x+f\left(f\left(y\right)-x\right), \qquad (1)$$

pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$.

***

Soluție:

Luând $y=-f\left(x\right)$ în relația din enunț, obținem $f\left(0\right)=2x+f\left(f\left(-f\left(x\right)\right)-x\right)$, adică

$$f\left(f\left(-f\left(x\right)\right)-x\right)=-2x+f\left(0\right), \text{ pentru orice } x\in\mathbb{R}. \qquad (2)$$

Se știe că $f_1\circ f_2$ surjectivă implică f_1 surjectivă. Cum orice funcție de gradul întâi este surjectivă, din relația (2) deducem că f este funcție surjectivă. Atunci există $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $f\left(k\right)=0$.

Din (1), pentru $x=k$, rezultă $f\left(y\right)=2k+f\left(f\left(y\right)-k\right)$, pentru orice $y\in\mathbb{R}$. Dacă notăm $z=f\left(y\right)-k$ și ținem cont că funcția f este surjectivă, deducem că $f\left(z\right)=z-k$, pentru orice $z\in\mathbb{R}$.

Așadar, o eventuală soluție a ecuației funcționale (1) este de forma $f\left(x\right)=x+c$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, unde c este o constantă reală.

Se verifică prin calcul că toate aceste funcții satisfac relația (1).