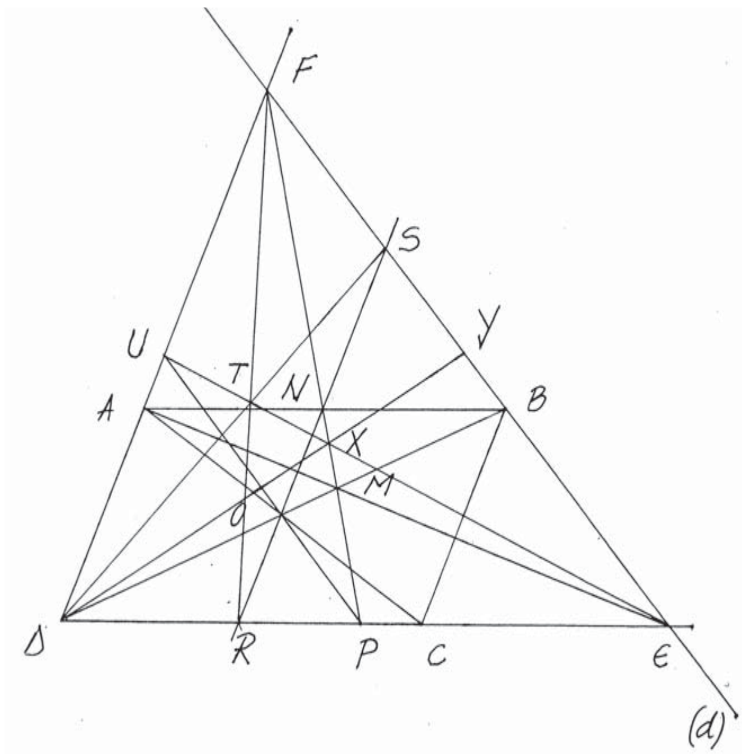
Problema 2. Fiind dat un paralelogram şi o dreaptă ce trece prin unul din vârfurile acestuia, cu rigla negradată să se construiască mijlocul segmentului determinat de intersecţia dreptei cu laturile paralelogramului ce nu trec prin vârful respectiv.

Niţă Cristi



Fie d dreapta care trece prin vârful B al paralelogramului $ABCD$.

Fie $d \cap AD = \{F\}$ şi $d \cap CD = \{E\}$.

În ΔEFD, în care $AB \| DE$ (ipoteză), trasăm cevienele EA, DB, FP, concurente în M. Aplicând teorema lui Ceva obţinem $\dfrac{BF}{BE} \cdot \dfrac{PE}{PD} \cdot \dfrac{AD}{AF} = 1$ şi cum $\dfrac{BF}{BE} = \dfrac{AF}{AD}$ (deoarece $AB \| DE$) vom obţine că $\dfrac{PE}{PD} = 1 \Leftrightarrow [PE] \equiv [PD]$ **(1)**.

Deoarece FP este mediană în ΔEFD şi $AB \| DE \Rightarrow FN$ este mediană în ΔAFB, unde $\{N\} = FP \cap AB$.

Unind N cu O, unde $\{O\} = AC \cap BD$, dreapta NO va tăia pe EF în S şi pe CD în R.

Cum $[AN] \equiv [NB] \Rightarrow [DR] \equiv [RC]$ şi că $RS \| DF$.

În ΔEDF, în care $SR \| DF$, trasăm cevienele DS, FR, EU, concurente în T. Aplicând teorema lui Ceva avem $\frac{UF}{UD} \cdot \frac{SE}{SF} \cdot \frac{RD}{RE} = 1$ şi cum $\frac{SE}{SF} = \frac{RE}{RD}$ (deoarece $SR \| DF$) obţinem $\frac{UD}{UF} = 1 \Leftrightarrow [UF] \equiv [UD]$ **(2)**.

Relaţiile **(1)** şi **(2)** ne indică faptul că UP este linie mijlocie în ΔEDF, de unde $UP \| EF$.

În ΔEDF trasăm cevienele FP, EU, DY, concurente în X. Aplicând teorema lui Ceva avem $\frac{FY}{EY} \cdot \frac{PE}{PD} \cdot \frac{UD}{UF} = 1$ şi cum $UP \| EF \Rightarrow \frac{PE}{PD} = \frac{UF}{UD}$, iar relaţia din teorema lui Ceva devine $\frac{FY}{EY} = 1 \Leftrightarrow [FY] \equiv [EY] \Rightarrow \{Y\}$ este mijlocul segmentului $[EF]$.

$\blacksquare$