Clasa a X-a - Problema 3

Enunţ: *Demonstraţi că*

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots}}}}}<2,$$

unde numărul de radicali este infinit.

Soluţie. Notăm $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$,…. Cu aceste notaţii avem $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Demonstraţi se realizează prin inducţie. Evident $a_1<2$. Presupunem $a_n<2$ şi avem $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2$, ceea ce trebuia demonstrat.