Etapa 1, Problema 2

Determinaţi numerele reale x având proprietatea că

$$\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}=\sqrt[5]{x+242}.$$

Lucian Tuţescu

Soluţie (**Cosmin Aştefanei**, Iaşi).

Impunem condiţia $x \geq 0$. Se observă că $x=1$ este soluţie a ecuaţiei date.

Dacă $x>1$, atunci $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}>\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{x}=3\sqrt[5]{x}$, în timp ce $\sqrt[5]{x+242}<3\sqrt[5]{x}$, deci ecuaţia nu are soluţii $x \in (1,+\infty)$.

Dacă $x<1$, atunci $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}<\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{x}=3\sqrt[5]{x}$, în timp ce $\sqrt[5]{x+242}>3\sqrt[5]{x}$, deci ecuaţia nu are soluţii $x \in [0,1)$.

În concluzie, $x=1$ este unica soluţie a ecuaţiei din enunţ.