Problema 2. **a)** Demonstraţi că, pentru orice numere naturale nenule k şi n, are loc egalitatea

$$\frac{k}{n(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)} = \\ = \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)}.$$

b) Dacă $A = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6} + \ldots + \frac{1}{97\cdot98\cdot99\cdot100}$ şi

$$B = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \ldots + \frac{1}{96\cdot97\cdot98\cdot99\cdot100},$$

comparaţi numerele $3A$ şi $16B$.

Soluţie:
a) Se aduc la acelaşi numitor şi se fac calculele în membrul stâng.
b) Vom calcula numerele A şi B folosind relaţia de la punctul a) scrisă pentru $k = 3$, respectiv $k = 4$. Avem

$$3A = \frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{3}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{3}{3\cdot4\cdot5\cdot6} + \ldots + \frac{3}{97\cdot98\cdot99\cdot100} = \\ \left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3} - \frac{1}{2\cdot3\cdot4}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot3\cdot4} - \frac{1}{3\cdot4\cdot5}\right) + \left(\frac{1}{3\cdot4\cdot5} - \frac{1}{4\cdot5\cdot6}\right) + \ldots + \\ \left(\frac{1}{96\cdot97\cdot98} - \frac{1}{97\cdot98\cdot99}\right) + \left(\frac{1}{97\cdot98\cdot99} - \frac{1}{98\cdot99\cdot100}\right).$$

Desfăcând parantezele, observăm că fiecare termen negativ este urmat de opusul său, cu excepţia ultimului termen. Aceştia se reduc, astfel că obţinem

$$3A = \frac{1}{1\cdot2\cdot3} - \frac{1}{98\cdot99\cdot100}.$$

Similar, se obţine că $4B = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{1}{97\cdot98\cdot99\cdot100}$.
Aşadar,

$$3A < 16B \iff \\ \frac{1}{1\cdot2\cdot3} - \frac{1}{98\cdot99\cdot100} < \frac{4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{4}{97\cdot98\cdot99\cdot100} \iff \\ \frac{1}{1\cdot2\cdot3} - \frac{1}{98\cdot99\cdot100} < \frac{1}{1\cdot2\cdot3} - \frac{4}{97\cdot98\cdot99\cdot100} \iff \\ \frac{4}{97\cdot98\cdot99\cdot100} < \frac{1}{98\cdot99\cdot100} \iff \\ 4 < 97,$$

ceea ce este evident adevărat, deci $3A < 16B$.