Problema 4. Fie $k \geq 1$ un număr întreg. Un operator de telefonie mobilă îi propune fiecărui client să aleagă k numere cu care comunicarea este gratuită (dacă o persoană A alege numărul lui B, atunci apelurile lui A către B şi cele ale lui B către A sunt gratuite.) Considerăm un grup de n persoane.
a) Dacă $n \geq 2k+2$, demonstraţi că există două persoane care nu pot comunica gratuit.
b) Dacă $n = 2k+1$, demonstraţi că cele n persoane pot alege numerele gratuite astfel încât să vorbească gratuit între ele.

test prin corespondenţă, Franţa, 2014

Soluţie: Vom spune că o persoană A a ales o persoană B dacă numărul lui B face parte dintre numerele alese de A cu care comunicarea să fie gratuită.
a) Deoarece fiecare persoană poate alege cel mult k alte persoane, există cel mult kn perechi de persoane care pot comunica gratuit. Ori numărul total de perechi de persoane este $\frac{n(n-1)}{2}$, (fiecare din cele n persoane este în pereche cu celelalte $n-1$, deci sunt $n(n-1)$ perechi, însă fiecare pereche a fost numărată de două ori) şi $\frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{n(2k+1)}{2} > nk$. Astfel, numărul total de perechi este mai mare decât numărul de perechi care pot comunica gratuit, deci există măcar o pereche de persoane care nu pot comunica gratuit.
b) Să plasăm cele $2k+1$ persoane pe un cerc. Fiecare persoană alege să comunice gratuit cu cele k persoane situate după ea pe cerc. Astfel fiecare persoană X va putea comunica gratuit cu toată lumea, celelalte k persoane, cele pe care nu le-a ales X, alegând-o ei pe X.