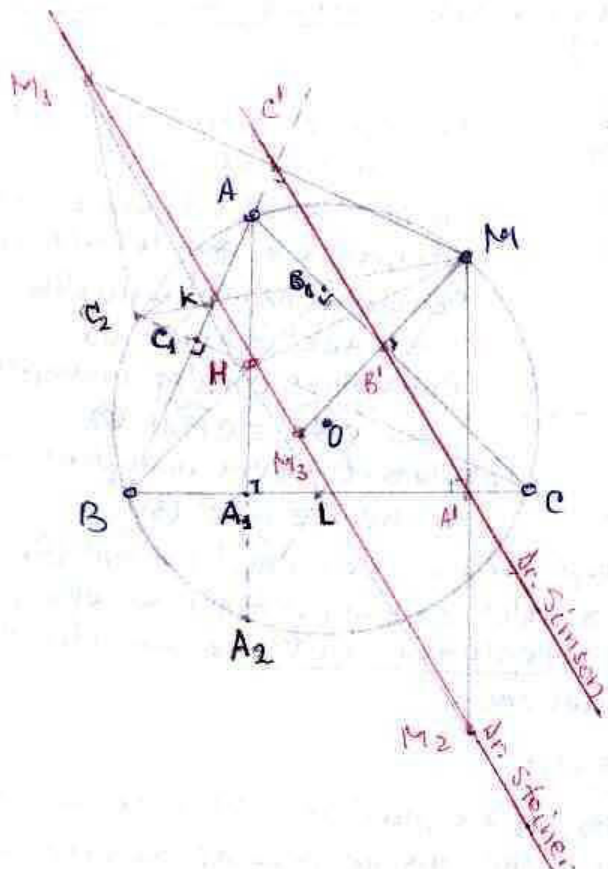


Dreapta lui Steiner, a punctului M în raport cu ΔABC trece prin ortocentrul H al triunghiului ABC

Soluție



Notem:
 (O) - cercul circum. ΔABC
 AH intersectează (O) în A_2
 BH " " " (O) în B_2
 $A_2M \cap HM_2 = \{L\}, L \in A_1C$
 $B_2M \cap HM_1 = \{K\}, K \in AC_1$
 A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor
 A', B', C' proiecțiile ortocentrului
 al lui M pe laturile a, b, c .

$\Rightarrow A_1$ mijl. $[AM_2]$
 C_1 mijl. $[HC_2]$

Vom arăta că punctele K, L și H sunt coliniare, de unde va rezulta că $H \in$ dreapta lui Steiner.

HA_2M_2M trapez isoscel cu $L =$ intersecția diagonalelor
 HC_2M_1M trapez isoscel cu $K =$ intersecția diagonalelor

Punctele A și K se află pe mediatoarea segm. $[HC_2] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \widehat{KHA} \equiv \widehat{AC_2K} \equiv \widehat{AC_2M} = \frac{1}{2} \widehat{AM}$$

$$\Delta LHA_2 : LA_2 \text{ mediat. segm. } [AM_2] \Rightarrow \widehat{LHA_2} \equiv \widehat{HA_2L} \equiv \widehat{AA_2M} = \frac{1}{2} \widehat{AM}$$

$\Rightarrow \widehat{KHA} \equiv \widehat{LHA_2} \Rightarrow$ punctele K, H și L sunt coliniare
 dar, H, L, M_2 coliniare și
 H, L, M_1 coliniare \Rightarrow

$\Rightarrow M_1, H, M_2$ coliniare, adică $H \in$ dreapta lui Steiner.

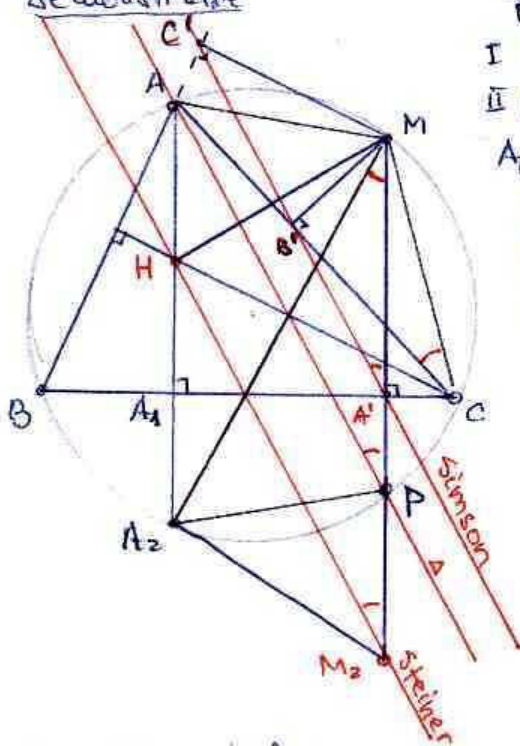
Obs. Din dem. $\Rightarrow AC_1 \cap MC_2 = K$ și $A_2M \cap HM_2 = L$
 $A_2M \cap HM_2 \cap AC_1 = \{L\}$

Dăm o altă soluție pentru ce arăta că dreapta lui Steiner trece prin ortocentrul ΔABC .

Teorema lui Steiner

Dreapta lui Simson e unu' punct oarecare M , de pe cercul circumscris ΔABC , trece prin mijlocul segmentului $[MH]$. (Prin urmare $H \in$ dreapta lui Steiner).

Demonstratie



Parcurgem două etape:

I Dem. că dr. $\Delta = AP \parallel$ dr. lui Simson

II Dem. că dr. $\Delta = AP \parallel HM_2$

Apoi, cum A' este mijlocul lui $[MH]$, folosind \angle și $\widehat{}$, va rezulta concluzia

Dem. I.

$$\widehat{APA'} \equiv \widehat{APM} = \frac{1}{2} \widehat{AM}$$

$$B'A'C'M \text{ inscriabil} \Rightarrow \widehat{B'A'M} \equiv \widehat{B'C'M} \equiv$$

$$\widehat{ACM} = \frac{1}{2} \widehat{AM}$$

$$\text{De aici} \Rightarrow \widehat{APA'} \equiv \widehat{C'A'M} \Rightarrow \Delta \parallel \text{dr. Simson}$$

Dem. II.

$$H A_2 M_2 M \text{ trapez isoscel} \Rightarrow$$

$$\widehat{HM_2M} \equiv \widehat{A_2MM_2} \equiv \widehat{A_2MP} = \frac{1}{2} \widehat{A_2P}$$

$$= \frac{1}{2} \widehat{AM} = \widehat{APM} \Rightarrow \widehat{HM_2P} \equiv \widehat{APM}$$

$$\Rightarrow \Delta \parallel \text{dr. Steiner } HM_2$$

Să recapitulăm:

1. Dreapta lui Simson este \parallel cu dreapta lui Steiner
2. Dreapta lui Simson este linie mijlocie în ΔMM_1M_2
3. Dreapta lui Simson trece prin mijlocul segm. $[MH]$ [Teorema lui Steiner,
4. Dreapta lui Steiner trece prin ortocentrul H al ΔABC