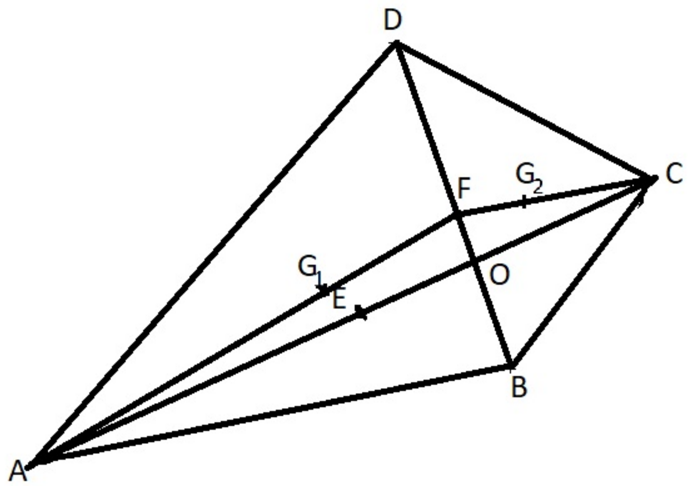
Problema 3
Etapa 3/2023
Clasa a IX-a

Problema 3. Se consideră un patrulater convex $ABCD$ şi se notează cu O punctul de intersecţie al diagonalelor, iar cu G_1 şi G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, respectiv BCD. Demonstraţi că, dacă $\overline{G_1O} = \overline{OG_2}$, atunci $ABCD$ este un paralelogram.

Romaniţa şi Ioan Ghiţă, Blaj, Supliment GM

Soluţie:



Deoarece $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right)$ şi $\overrightarrow{OG_2} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$ avem că $\overrightarrow{G_1O} = \overrightarrow{OG_2}$ este echivalent cu $\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{0}$, de unde $\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ (*)
Notăm cu E şi F mijloacele diagonalelor (AC) respectiv (BD); deducem astfel:
$\overrightarrow{OC} + +\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OE}$ şi $\overrightarrow{OB} + +\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OF}$
Egalitatea (*) conduce acum la: $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{FO}$, aşadar punctele O, E şi F sunt coliniare; rezultă $O = E = F$, deci diagonale se înjumătăţesc, adică $ABCD$ este paralelogram.