Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia

$$11^n - 2^n = k^2.$$

Cristinel Mortici

Soluţie.
Pentru $n = 0$ obţinem $k = 0$, iar pentru $n = 1$, $k = 3$.
Vom arăta în continuare că ecuaţia nu are soluţii cu $n \geq 2$.
Presupunem că ar exista $n \geq 2$ pentru care ecuaţia are soluţie şi alegem n_0 cel mai mic $n \geq 2$ cu această proprietate. Cum $n_0 \geq 1$, membrul stâng este impar, deci trebuie k impar. Atunci $k^2 \equiv 1 \pmod 4$, $2^{n_0} \equiv 0 \pmod 4$, iar $11^{n_0} \equiv (-1)^{n_0} \pmod 4$. Pentru ca $11^{n_0} + 2^{n_0} \equiv k^2 \pmod 4$ trebuie ca n_0 să fie par. Fie aşadar $m \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $n_0 = 2m$. Rezultă că $k^2 = (11^m - 2^m)(11^m + 2^m)$. Deoarece k este impar, numerele $11^m - 2^m$ şi $11^m + 2^m$ sunt prime între ele. Din relaţia precedentă rezultă atunci că $11^m - 2^m$ şi $11^m + 2^m$ trebuie să fie pătrate perfecte. Dacă $m \geq 2$ s-ar contrazice minimalitatea lui n_0. Rămâne $m = 1$, adică $n_0 = 2$, dar $11^2 - 2^2$ nu este pătrat perfect. Prin urmare, ecuaţia nu are soluţii (n, k) cu $n \geq 2$, singurele soluţii fiind $n = k = 0$ şi $n = 1$, $k = 3$.