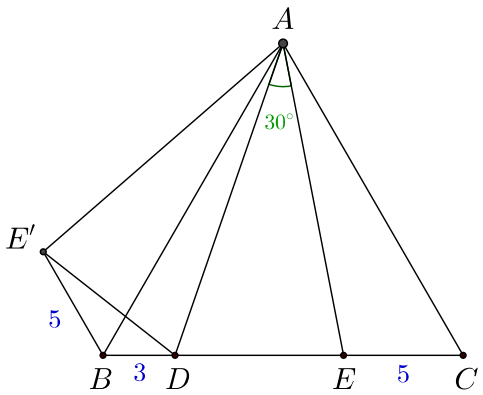
Problema 3. Pe latura $[BC]$ a triunghiului echilateral ABC se consideră punctele D şi E astfel încât $BD = 3\,\text{cm}$, $CE = 5\,\text{cm}$ şi $D \in (BE)$. Ştiind că $m(\angle DAE) = 30°$, aflaţi lungimea segmentului $[DE]$.

* * *

Soluţia 1:
Pe latura $[AB]$, în exteriorul triunghiului ABC, construim un triunghi ABE' congruent cu triunghiul ACE („rotim" triunghiul ACE cu $60°$ în jurul lui A).
Atunci $m(\angle E'AD) = m(\angle E'AB) + m(\angle BAD) = m(\angle EAC) + m(\angle BAD) = m(\angle BAC) - m(\angle DAE) = 60° - 30° = 30°$.
Rezultă că triunghiurile $E'AD$ şi EAD sunt congruente LUL deoarece:
$AE' = AE$, $m(\angle E'AD) = 30° = m(\angle EAD)$ şi $AD = AD$. Aşadar $DE' = DE$.
În triunghiul DBE' avem: $BD = 3\,\text{cm}$, $BE' = 5\,\text{cm}$, $m(\angle DBE') = 120°$, deci din teorema lui Pitagora generalizată (proiecţia lui $[BE']$ pe BD cade în afară şi are lungimea $BE' \cdot \cos 60°$) rezultă că $DE'^2 = BD^2 + BE'^2 + 2BD \cdot BE' \cdot \cos 60° = 25 + 9 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 49$ (cm^2), deci $DE = DE' = 7\,\text{cm}$.



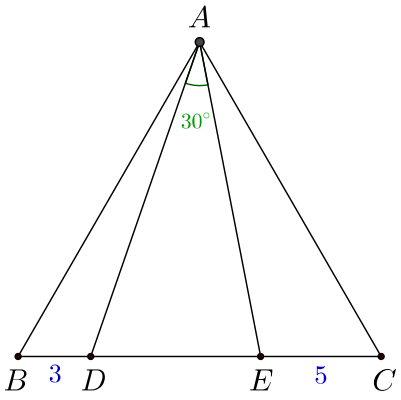
Soluţia 2: (schiţă)
Notând cu a lungimea laturii triunghiului ABC şi aplicând teorema generalizată a lui Pitagora în triunghiurile ABD, ACE şi DAE, obţinem:

$$AD^2 = a^2 + 9 - 3a, \qquad AE^2 = a^2 + 25 - 5a$$

şi

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos 30°,$$

de unde, cum $DE = a - 8$, obţinem ecuaţia

$$(a-8)^2 = a^2 + 9 - 3a + a^2 + 25 - 5a - \sqrt{3(a^2+9-3a)(a^2+25-5a)}.$$

Această ecuaţie revine la $a^2 + 8a - 30 = \sqrt{3(a^2+9-3a)(a^2+25-5a)}$ şi, prin ridicare la pătrat, după calcule, la $2a^4 - 40a^3 + 143a^2 + 120a - 225 = 0$. Dar $2a^4 - 40a^3 + 143a^2 + 120a - 225 = (a-1)(a-15)(2a^2 - 8a - 15)$ şi, cum $a > 8$ implică $2a^2 - 8a - 15 = a(a-8) + (a^2 - 15) > 0$, singura soluţie mai mare ca 8 a ecuaţiei $2a^4 - 40a^3 + 143a^2 + 120a - 225 = 0$ este $a = 15$. De aici rezultă imediat că $DE = a - 8 = 7$ (cm).