ViitoriOlimpici.ro

Problema 3
Etapa 5
Clasa a VI-a

Problema 3. Fie a şi b numere naturale astfel încât numerele $\dfrac{2a+7}{3b+2}$ şi $\dfrac{5b+1}{5a+6}$ să fie naturale. Calculaţi $a \cdot b + a + b$.

Mihai Bunget, Tg.Jiu

Soluţie: Deoarece $\dfrac{2a+7}{3b+2}$ este număr natural nenul deducem că $2a+7 \geq 3b+2$, sau $4a+14 \geq 6b+4$.

Deoarece $\dfrac{5b+1}{5a+6}$ este număr natural nenul deducem că $5b+1 \geq 5a+6$.

Cum $4a+14 \geq 6b+4 > 5b+1 \geq 5a+6$ obţinem că $a < 8$.

Pentru $a = 0$ obţinem $\dfrac{7}{3b+2}$ natural, imposibil.

Pentru $a = 1$ obţinem $\dfrac{9}{3b+2}$ natural, imposibil.

Pentru $a = 2$ obţinem $\dfrac{11}{3b+2}$ natural, deci $b = 3$. Atunci $\dfrac{5b+1}{5a+6} = 1$ care este natural.

Pentru $a = 3$ obţinem $\dfrac{13}{3b+2}$ natural, imposibil.

Pentru $a = 4$ obţinem $\dfrac{15}{3b+2}$ natural, imposibil.

Pentru $a = 5$ obţinem $\dfrac{17}{3b+2}$ natural, deci $b = 5$. Atunci $\dfrac{5b+1}{5a+6} = \dfrac{26}{31}$ care nu este natural.

Pentru $a = 6$ obţinem $\dfrac{19}{3b+2}$ natural, imposibil.

Pentru $a = 7$ obţinem $\dfrac{21}{3b+2}$ natural, imposibil.