Etapa 1, Problema 3

Fie M o mulţime nevidă şi a un element al ei. Demonstraţi că mulţimea M este infinită dacă şi numai dacă mulţimile M şi $M \setminus \{a\}$ au acelaşi cardinal.

***

Soluţie.

Dacă M este finită având cardinalul n, evident că $|M \setminus \{a\}| = n-1 < |M|$.

Rămâne să construim o bijecţie între M şi $M \setminus \{a\}$ în cazul în care M este infinită. Mulţimea M va conţine un şir (cu termenii distincţi) $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = a$; notăm $A = \{a_n | \, n \geq 1\}$. Considerăm funcţia

$$f : M \to M \setminus \{a\}, \; f(x) = \begin{cases} a_{n+1}, & \text{dacă } x = a_n \in A \\ x, & \text{dacă } x \notin A \end{cases}.$$

Se demonstrează uşor că funcţia f este bijectivă şi, cu aceasta, soluţia este completă.