Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$\sqrt{17x^2 - 25y^2 + 68x + 20y + 55} + \sqrt{9y^2 - 17x^2 - 12y - 68x - 56} = z.$$

***

Soluţie. Din $17x^2 - 25y^2 + 68x + 20y + 55 \geqslant 0$ rezultă

$$25y^2 - 20y - 55 \leqslant 17x^2 + 68x \tag{1}$$

Din $9y^2 - 17x^2 - 12y - 68x - 56 \geqslant 0$ rezultă

$$17x^2 + 68x \leqslant 9y^2 - 12y - 56 \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă $25y^2 - 20y - 55 \leqslant 9y^2 - 12y - 56$, deci $(4y-1)^2 \leqslant 0$. În consecinţă, $y = \frac{1}{4}$. Înlocuind y în (2) şi (1), obţinem:

$$17x^2 + 68x \leqslant -\frac{935}{16} \leqslant 17x^2 + 68x.$$

Aşadar $4x^2 + 64x + 55 = 0$, de unde obţinem soluţiile $x_1 = -\frac{11}{4}$, $x_2 = -\frac{5}{4}$.

În oricare dintre situaţii, au loc egalităţile:

$$17x^2 + 68x = 25y^2 - 20y - 55 = 9y^2 - 12y - 56$$

şi de aici rezultă că $z = 0$.