Clasa a X-a

Etapa 6, Problema 4

Enunţ: Notăm cu Σ, mulţimea tuturor punctelor unui plan. Considerăm o funcţie $f:\Sigma\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că oricare ar fi paralelogramul $XYZT$ avem $f(X)+f(Z)=f(Y)+f(T)$.

a) Să se arate că dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$ atunci

$$f(M)=\frac{f(A)+f(B)}{2};$$

b) Să se arate că dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC atunci

$$f(G)=\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}.$$

Propusă de Nicolae Bourbăcuţ, Hunedoara

Soluţie:

a) Fie C un punct necoliniar cu A şi B. Fie P,Q mijloacele segmentelor $[CA]$, respectiv $[CB]$. Atunci $AMQP$ şi $BQPM$ sunt paralelograme. Atunci $f(A)+f(Q)=f(M)+f(P)$ şi $f(B)+f(P)=f(M)+f(Q)$. Adunăm cele două relaţii şi obţinem concluzia.

b) Fie M mijlocul lui $[AB]$, iar P simetricul lui G faţă de M. Atunci G este mijlocul lui CP, deci $f(C)+f(P)=2f(G)$. Dar $GAPB$ este paralelogram, de unde $f(A)+f(B)=f(G)+f(P)$. Adunăm cele două egalităţi şi obţinem concluzia.