Problemă. Cu cifrele de la 1 la 9 se formează trei numere naturale de câte trei cifre fiecare. Cifrele fiecărui număr sunt diferite şi cele trei numere nu au cifre egale. Arătaţi că pentru cel puţin unul dintre numere produsul cifrelor este mai mare sau egal cu 72.

* * *

Soluţie: Fie $\overline{a_1a_2a_3}$, $\overline{a_4a_5a_6}$ şi $\overline{a_7a_8a_9}$ cele trei numere formate cu cifrele de la 1 la 9.

Să presupunem că există trei numere astfel încât produsul cifrelor lor să fie mai mic decât 72.

Atunci avem

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \leq 71$$

$$a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \leq 71$$

şi

$$a_7 \cdot a_8 \cdot a_9 \leq 71.$$

Înmulţind cele trei relaţii obţinem

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 \cdot a_9 \leq 71 \cdot 71 \cdot 71.$$

Cum $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ sunt toate cifrele de la 1 la 9 avem

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \leq 71 \cdot 71 \cdot 71$$

adică

$$362880 \leq 357911.$$

Dar ultima relaţie este falsă şi deci presupunerea că în toate cazurile produsul cifrelor numerelor este mai mic decât 72 este greşită. Rezultă că cel puţin unul dintre numere are produsul cifrelor mai mare sau egal cu 72.