Etapa 2, Problema 1

Fie $n \geq 2$ un număr natural şi z_1, z_2, ..., z_n numere complexe cu modulul 1, astfel încât $z_1 + z_2 + ... + z_n = n$. Demonstraţi că $z_1 = z_2 = ... = z_n = 1$.

*****

Soluţie.
Folosind ipotezele problemei şi inegalitatea modulului, avem:

$$n = \mid z_1 + z_2 + ... + z_n \mid \leq \mid z_1 \mid + \mid z_2 \mid + ... + \mid z_n \mid = n.$$

Egalitatea în inegalitatea modulului se atinge atunci când numerele z_1, z_2, ..., z_n au, toate, acelaşi argument. Având şi acelaşi modul, obţinem că $z_1 = z_2 = ... = z_n$. Condiţia $z_1 + z_2 + ... + z_n = n$ conduce la $z_1 = z_2 = ... = z_n = 1$.