Problema 4. Fie $A = \{x \mid x = 2009 \cdot 2010 - a;\ 0 \leq a \leq 2008\}$ şi $B = \{x \mid x = 2009 \cdot 2010 + b;\ 0 \leq b \leq 2009\}$. Arătaţi că mulţimea $A \cup B$ nu conţine niciun pătrat perfect.

Silviu Boga, Iaşi

Soluţie. Cel mai mic element din A se obţine pentru $a = 2008$ şi este $2009 \cdot 2010 - 2008 = 2009 \cdot (2009 + 1) - 2008 = 2009^2 + 1$, iar cel mai mare element din A se obţine pentru $a = 0$ şi este $2009 \cdot 2010$. Cel mai mic element din B se obţine pentru $b = 0$ şi este $2009 \cdot 2010$, iar cel mai mare element din B se obţine pentru $b = 2009$ şi este $2009 \cdot 2010 + 2009 = (2010 - 1) \cdot 2010 + 2009 = 2010^2 - 1$. Deducem că $A \cup B$ conţine doar numere naturale cuprinse între 2009^2 şi 2010^2. Cum acestea sunt pătrate perfecte consecutive între ele nu mai există nici un pătrat perfect.