Etapa 3, problema 2

Camelia Oprea, clasa a 9-a

Să se determine numărul minim de numere naturale cu proprietatea că putem găsi întotdeauna printre ele 27 de numere cu suma divizibilă cu 27.

Soluţie:

Voi demonstra că numărul minim de numere este 53.

Pentru aceasta demonstrez mai întâi că printre oricare 5 numere naturale există 3 cu suma divizibilă cu 3.

Consider trei cutii etichetate 0, 1, 2. Punem un număr în cutia k dacă restul la împărţirea cu 3 este k.

Dacă după distribuirea celor 5 numere, în fiecare cutie există cel puţin un număr, atunci suma a trei numere, fiecare din câte o cutie, este divizibilă cu trei. Dacă în schimb există o cutie goală, atunci există o cutie cu cel puţin trei numere, suma lor fiind deci divizibilă cu trei.

Mai observăm că numărul 5 este cel mai mic, altfel dacă am lua 4 numere acestea ar putea fi două cu restul 0 şi două cu restul 1 şi nu se îndeplineşte condiţia.

Oricare ar fi 53 de numere naturale, procedez astfel:

Pas 1. Iau 5 numere dintre care aleg 3 a căror sumă este diviuibilă cu 3 şi formez o grupă. Fie suma lor egală cu $3k_1$.

Pasul i, $i=\overline{2,17}$. La cele două numere rămase de la pasul precedent, mai adaug trei din cele încă neutilizate. Acum din 5 numere pot alege 3 a căror sumă este diviuibilă cu 3 şi formez o nouă grupă. Fie suma lor egală cu $3k_i$, $k_i \in \mathbf{N}$

După pasul 17 s-au format 17 grupe de câte 3 numere, cu sumele $3k_1, 3k_2, \ldots, 3k_{17}$, şi au rămas două numere de-o parte. Repet procedeul cu cele 17 grupe:

Pas 1. Iau 5 grupe dintre care aleg 3 pentru care suma $k_j + k_l + k_m$ este divizibilă cu 3, şi deci suma celor nouă numere selectate este

$$3k_j + 3k_l + 3k_m = 3(\underbrace{k_j + k_l + k_m}_{\vdots 3}) = 3 \cdot 3n_1 = 9n_1 \vdots 9.$$

Pasul i, $i=\overline{2,5}$. La cele două grupe rămase de la pasul precedent, mai adaug trei din cele încă neutilizate. Acum din 5 grupe pot alege 3 pentru care suma $k_{j_i} + k_{l_i} + k_{m_i}$ este divizibilă cu 3, şi deci suma celor nouă numere selectate este de forma $9n_i$, $n_i \in \mathbf{N}$.

După pasul 5 s-au format 5 grupe de câte 9 numere, cu sumele $9n_1, 9n_2, \ldots, 9n_5$, şi au rămas două grupe de-o parte. Din cele 5 grupe pot alege cu siguranţă 3 pentru care suma $n_p + n_q + n_r$ este divizibilă cu 3, şi deci suma celor 27 de numere selectate este

$$9n_p + 9n_q + 9n_r = 9(\underbrace{n_p + n_q + n_r}_{\vdots 3}) = 27s \vdots 27,\ s \in \mathbf{N}.$$

Mai rămâne de demonstrat că 53 este numărul cel mai mic.

Este de ajuns să dăm un contraexemplu pentru 52:

Luăm 26 de numere congruente cu 0 (mod 3) şi 26 de numere congruente cu 1 (mod 3) şi oricum am alege 27 de numere dintre aceste 52, suma lor nu este divizibilă cu 27. (Sau alt exemplu:

Luăm 26 de numere egale cu 1 şi 26 egale cu 2. Astfel trebuie să găsim numerele naturale *a* şi *b*, $0 \le a, b \le 26$ astfel încât :

$$\begin{cases} a+b=27 \\ (1\cdot a+2\cdot b) \vdots 27 \end{cases} \Rightarrow \quad b=27-a$$

$\Rightarrow (a+54-2a) \vdots 27 \Rightarrow (54-a) \vdots 27 \Rightarrow a \vdots 27$ şi cum $a \le 26$

$\Rightarrow$ singura posibilitate eate $a=0 \Rightarrow b=27$, ceea ce nu convine deoarece $b \le 26$.)

Deci din 52 de numere naturale nu putem găsi întotdeauna 27 a căror sumă să fie divizibilă cu 27.

În concluzie: $(5\cdot 3+2)\cdot 3+2=53$, deci 53 este numărul minim de numere naturale cu proprietatea că putem găsi întotdeauna printre ele 27 de numere cu suma divizibilă cu 27.

Generalizarea 1.

Printre oricare $2\cdot 3^n-1$ numere **întregi** există 3^n cu suma divizibilă cu 3^n, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Demonstraţie:

Aplicând algoritmul de mai sus obţinem:

$$[...[[(5\cdot 3+2)\cdot 3+2]\cdot 3+2]...]\cdot 3+2=5\cdot 3^{n-1}+2\cdot 3^{n-2}+2\cdot 3^{n-3}+...+2\cdot 3+2=$$

$$=5\cdot 3^{n-1}+2\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1}=5\cdot 3^{n-1}+3^{n-1}-1=6\cdot 3^{n-1}-1=2\cdot 3^n-1 \ _{q.e.d.}$$

Generalizarea 2.

Printre oricare $2n-1$ numere **întregi** există *n* cu suma divizibilă cu *n*, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.