Etapa 2, Problema 2

Determinaţi perechile de numere întregi (x, y) cu proprietatea că

$$\left|\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}\cdot i\right|=\sqrt{3}.$$

***

Soluţie.
Cum

$$\left|\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}\cdot i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{2x+y}\right)^2+\left(\sqrt{x+2y}\right)^2}=\sqrt{3\left(x+y\right)},$$

condiţia din enunţ revine la $x+y=1$, atât timp cât au sens (în $\mathbb{R}$) radicalii $\sqrt{2x+y}$ şi $\sqrt{x+2y}$. Astfel, numerele x şi y sunt soluţiile întregi ale sistemului

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y\geq 0 \\ x+2y\geq 0 \end{cases}.$$

Înlocuind $y=1-x$, obţinem inecuaţiile $x+1\geq 0$ şi $x-2\leq 0$, de unde $x\in\{-1,0,1,2\}$. Perechile căutate sunt

$$(-1,2)\,,\ (0,1)\,,\ (1,0)\,,\ (2,-1)\,.$$