P3. Să se demonstreze că $a^2+b^2+c^2 \le a^2b+b^2c+c^2a+1, \forall a,b,c \in [0,1]$. Să se precizeze cazurile de egalitate.

S. Fie $f(a)=(1-b)a^2-c^2a+(b^2+c^2-b^2c)$. Pentru $b=1$ avem evident $f(a)\le 1$ iar pentru $b\in[0,1)$, f este funcţie de gradul al doilea cu coeficientul dominant strict pozitiv şi vom avea $f(a)\le \max\{f(0), f(1)\}$. Trebuie să mai arătăm că $f(0)\le 1$ şi că $f(1)\le 1$. Cele două inegalităţi se reduc pe rând la $(1-c)(1+c-b^2)\ge 0$, respectiv $b^2c+b(1-b)\ge 0$. Avem egalitate când două dintre numere sunt 0 şi al treilea este 1 sau când două dintre ele sunt 1 şi al treilea este 0.