Problema 1. Problema 1. Să se arate că dacă ultimele patru cifre ale unui pătrat perfect sunt egale, atunci acestea sunt egale cu 0.

Soluţie:

Fie a cifra din enunţ; evident $a \in \{0; 1; 4; 5; 6; 9\}$.

Avem $x^2 \equiv a \cdot 1111 \pmod{10^4}$. De aici deducem că $x^2 \equiv 7a \pmod{16}$.

Dacă a este impar, atunci şi x este impar şi avem că $1 \equiv x^2 \equiv 7a \pmod 8$, deci $a \equiv 7 \pmod 8$, fals câtă vreme 1, 5, 9 nu au aceste proprietăţi.

Dacă a este par şi $a \neq 0$, atunci şi x este par şi avem că $0 \equiv x^2 \equiv 7a \pmod 4$. De aici deducem că $a = 4$. Avem $x = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, $4k^2 \equiv 28 \pmod{16}$, $k^2 \equiv 7 \equiv 3 \pmod 4$, ceea ce este fals.

Aşadar $a = 0$.