

Determinați numerele naturale a și b pentru care ecuația

$$|ax + b| + |ax - b| = 100$$

are exact trei soluții în mulțimea numerelor întregi.

Andrei Eckstein

Soluție: Dacă $a = 0$ ecuația devine $2b = 100$ care are o infinitate de soluții întregi dacă $b = 50$ și niciuna dacă $b \neq 50$. În continuare presupunem că $a \neq 0$.

• Dacă $x < -\frac{b}{a} \leq 0$, ecuația revine la $-2ax = 100$, adică $x = -\frac{50}{a} < -\frac{b}{a}$ dacă $b < 50$, deci în acest caz ecuația are cel mult o soluție.

• La fel, dacă $x > \frac{b}{a} \geq 0$, ecuația revine la $2ax = 100$, adică $x = \frac{50}{a} > \frac{b}{a}$ dacă $b < 50$, deci și în acest caz ecuația are cel mult o soluție.

• În fine, în cazul $x \in \left[-\frac{b}{a}, \frac{b}{a}\right]$, ecuația revine la $2b = 100$, adică $b = 50$, care este verificată de orice $x \in \left[-\frac{b}{a}, \frac{b}{a}\right]$.

Deoarece în celelalte cazuri nu se obțin decât cel mult două soluții, trebuie ca și în acest caz să avem cel puțin o soluție, prin urmare este necesar ca $b = 50$. În acest caz soluțiile găsite în cazurile precedente nu convin (trebuia $b < 50$), deci

mulțimea soluțiilor întregi ale ecuației este $\left[-\frac{b}{a}, \frac{b}{a}\right] \cap \mathbb{Z}$, unde $b = 50$. Pentru ca

această mulțime să aibă exact 3 elemente trebuie ca $1 \leq \frac{b}{a} < 2$, adică $25 < a \leq 50$.

Într-adevăr, pentru $a \in \{26, 27, \dots, 50\}$ și $b = 50$, ecuația din enunț are trei soluții întregi: $-1, 0$ și 1 .