Etapa 3, Problema 3

Fie n un număr natural nenul. Determinaţi numerele reale pozitive x cu proprietatea că

$$x^n - \lfloor x \rfloor = n.$$

(S-a notat, în mod uzual, partea întreagă a numărului real x cu $\lfloor x \rfloor$.)

Constantin Nicolau, Gazeta Matematică 5-6/2000

Soluţie.

Dacă $n = 1$, ecuaţia $x - \lfloor x \rfloor = 1 \Leftrightarrow \{x\} = 1$ nu are soluţii reale.

Dacă $n \geq 2$, atunci $n + \lfloor x \rfloor = x^n \geq 1 + n(x-1)$, conform inegalităţii lui Bernoulli. Cum $x \geq \lfloor x \rfloor$, rezultă că $n + x \geq 1 + n(x-1)$, deci

$$x \leq \frac{2n-1}{n-1} = 2 + \frac{1}{n-1} < 3.$$

Distingem situaţiile:

(i) $x \in [0,1)$. Ecuaţia devine $x^n = n$, de unde $x = \sqrt[n]{n} \notin [0,1)$; ecuaţia nu are soluţii în acest caz.

(ii) $x \in [1,2)$. Ecuaţia devine $x^n = n+1$, cu soluţia $x = \sqrt[n]{n+1} \in [1,2)$.

(iii) $x \in [2,3)$. Ecuaţia devine $x^n = n+2$, de unde $x = \sqrt[n]{n+2}$; avem că $\sqrt[n]{n+2} \in [2,3)$ dacă şi numai dacă $n = 2$, deoarece $2^n > n+2, \forall n \geq 3$.

În concluzie, $S = \emptyset$ când $n = 1$, $S = \left\{\sqrt{3}, 2\right\}$ când $n = 2$ şi $S = \left\{\sqrt[n]{n+1}\right\}$ când $n \geq 3$.