

## Acțiuni de grupuri

lect.dr. Mihai Chiș  
Facultatea de Matematică și Informatică  
Universitatea de Vest din Timișoara

Viitori Olimpici ediția a 11-a, etapa a 3-a, clasa a XII-a

**Definiție 1.** Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $M \neq \emptyset$  o mulțime nevidă. O aplicație  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  se numește *acțiune (la stânga) a lui  $G$  pe  $M$*  dacă verifică proprietățile:

- 1)  $\alpha(gh, m) = \alpha(g, \alpha(h, m))$ ,  $(\forall)g, h \in G, m \in M$ .
- 2)  $\alpha(1, m) = m$ ,  $(\forall)m \in M$ .

**Observație 2.** 1) Dacă notăm  $g \cdot m := \alpha(g, m)$ , condițiile de mai sus se pot scrie în forma:

- 1)  $gh \cdot m = g \cdot (h \cdot m)$ ,  $(\forall)g, h \in G, m \in M$ .
- 2)  $1 \cdot m = m$ ,  $(\forall)m \in M$ .

2) În mod asemănător se poate defini termenul de acțiune la dreapta a unui grup pe o mulțime nevidă, pentru care se pot demonstra proprietăți analoge celor pe care le vom prezenta pentru acțiuni la stânga. Noi ne vom referi în continuare doar la acțiuni la stânga, pe care le vom numi simplu acțiuni.

**Exemplu 3.** 1) Fie  $G$  un grup și  $H \leq G$ . Pe mulțimea claselor laterale la stânga  $(G/H)_s$  ale subgrupului în grupul  $G$  putem defini acțiunea

$$\alpha : G \times (G/H)_s \rightarrow (G/H)_s : (g, xH) \mapsto gxH.$$

Aceasta se numește acțiunea naturală a lui  $G$  pe  $(G/H)_s$ .

2) Fie  $S_X$  grupul simetric al permutărilor unei mulțimi nevide  $X$ , iar  $G \leq S_X$  un subgrup al său ( $G$  se numește un grup de permutări ale mulțimii  $X$ ). Atunci  $G$  acționează pe  $X$  prin

$$\alpha : G \times X \rightarrow X : (g, x) \mapsto g(x).$$

(acțiunea de evaluare)

3) Fie  $G$  un grup.  $G$  acționează pe mulțimea propriilor sale elemente prin

$$\alpha : G \times G \rightarrow G : (g, x) \mapsto gxg^{-1} \stackrel{\text{not}}{=} gx.$$

(acțiunea de conjugare)

4) Un grup  $G$  acționează prin conjugare și asupra mulțimii  $\mathcal{P}^*(G)$  a submulțimilor sale nevide:

$$\alpha : G \times \mathcal{P}^*(G) \rightarrow \mathcal{P}^*(G) : (g, A) \mapsto gAg^{-1} \stackrel{\text{not}}{=} gA.$$

De asemenea, asupra mulțimii  $\mathcal{S}(G)$  a subgrupurilor sale:

$$\alpha : G \times \mathcal{S}(G) \longrightarrow \mathcal{S}(G) : (g, H) \longmapsto gHg^{-1} \stackrel{\text{not}}{=} {}^gH.$$

**Definiție 4.** Dacă  $\alpha : G \times M \longrightarrow M : (g, m) \longmapsto \alpha(g, m) \stackrel{\text{not}}{=} g \cdot m$  este o acțiune, definim pe  $M$  relația  $\sim_\alpha$  de asociere în raport cu  $\alpha$  prin

$$x \sim_\alpha y \stackrel{\text{def}}{=} (\exists)g \in G : g \cdot x = y.$$

**Propoziție 5.** Dacă  $\alpha : G \times M \longrightarrow M : (g, m) \longmapsto \alpha(g, m) \stackrel{\text{not}}{=} g \cdot m$  este o acțiune, relația de asociere în raport cu acțiunea  $\alpha$  este o relație de echivalență pe  $M$ .

**Definiție 6.** Clasa de echivalență a unui element  $x \in M$  în raport cu relația  $\sim_\alpha$  se numește orbita elementului  $x$  în raport cu acțiunea  $\alpha$ .

**Observație 7.** Orbita unui element oarecare  $x \in M$  în raport cu o acțiune  $\alpha : G \times M \longrightarrow M$  este

$$\begin{aligned} [x]_{\sim_\alpha} &= \{y \in M \mid x \sim_\alpha y\} = \{y \in M \mid (\exists)g \in G : y = g \cdot x\} = \\ &= \{g \cdot x \mid g \in G\} \stackrel{\text{not}}{=} G \cdot x. \end{aligned}$$

**Exemplu 8.** 1) Orbita unui element  $x \in G$  în raport cu acțiunea prin conjugare se numește clasa de conjugare a elementului  $x$ , notată  ${}^Gx$  sau  $x^G$ .

2) Orbita unei clase laterale  $xH$  în raport cu acțiunea naturală a unui grup  $G$  pe mulțimea  $(G/H)_s$  a claselor laterale la stânga în raport cu un subgrup  $H$  al său este întreaga mulțime  $(G/H)_s$ . O acțiune care determină o singură orbită în mulțimea suport a acțiunii se numește acțiune tranzitivă.

**Definiție 9.** Stabilizatorul unui element  $x \in M$  în raport cu o acțiune  $\alpha : M \times G \longrightarrow M$  este mulțimea

$$\text{Stab}_G(x) := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

**Exemplu 10.** 1) Pentru acțiunea unui grup prin conjugare pe el însuși, stabilizatorul unui element  $x \in G$  este centralizatorul elementului:

$$C_G(x) = \{g \in G \mid {}^gx = x\} = \{g \in G \mid gx = xg\}.$$

2) Pentru acțiunea prin conjugare a unui grup pe mulțimea submulțimilor sale nevide, stabilizatorul unei submulțimi  $A \subseteq G$  este normalizatorul submulțimii:

$$N_G(A) = \{g \in G \mid {}^gA = A\} = \{g \in G \mid gA = Ag\}.$$

3) Pentru acțiunea naturală a unui grup  $G$  pe mulțimea  $(G/H)_s$  a claselor laterale la stânga ale unui subgrup  $H \leq G$ , stabilizatorul clasei  $H$  este chiar  $H$ .

**Propoziție 11.** Stabilizatorul  $\text{Stab}_G(x)$  al unui element  $x \in M$  în raport cu o acțiune  $\alpha : G \times M \longrightarrow M$  a unui grup  $(G, \cdot)$  pe o mulțime  $M$  este un subgrup al grupului  $G$ .

**Observație 12.** Dacă  $\alpha : G \times M \rightarrow M : (g, x) \mapsto g \cdot x$  este o acțiune, atunci pentru orice  $g, h \in G$  și  $x \in M$  au loc echivalențele:

$$g \cdot x = h \cdot x \iff h^{-1}g \cdot x = x \iff h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x) \iff g \cdot \text{Stab}_G(x) = h \cdot \text{Stab}_G(x).$$

Prin urmare, are loc și  $g \cdot x \neq h \cdot x \iff g \cdot \text{Stab}_G(x) \neq h \cdot \text{Stab}_G(x)$ .

Obținem astfel următoarea proprietate:

**Propoziție 13.** Cardinalul orbitei unui element  $x \in M$  în raport cu o acțiune  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  este egal cu indicele stabilizatorului elementului:

$$|G \cdot x| = [G : \text{Stab}_G(x)].$$

**Corolar 14.** Dacă  $M$  este o mulțime finită, iar  $\mathcal{R}$  un sistem de reprezentanți ai orbitelor definite de acțiunea  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  pe  $M$ , atunci

$$|M| = \sum_{x \in \mathcal{R}} [G : \text{Stab}_G(x)]$$

(ecuația claselor asociată acțiunii  $\alpha$ ).

**Exemplu 15.** Pentru acțiunea prin conjugare a unui grup  $G$  asupra elementelor sale, notând cu  $\mathcal{K}$  un sistem de reprezentanți ai claselor de conjugare, avem atunci:

$$|G| = \sum_{x \in \mathcal{K}} [G : C_G(x)]$$

(ecuația claselor grupului  $G$ ).

**Observație 16.** Dacă  $x, y \in M$  sunt asociate în raport cu acțiunea  $\alpha$ , cu  $y = g \cdot x$ , atunci

$$\begin{aligned} h \in \text{Stab}_G(y) &\iff h \cdot y = y \iff hg \cdot x = g \cdot x \iff g^{-1}hg \cdot x = x \iff \\ &\iff g^{-1}hg \in \text{Stab}_G(x) \iff h \in g \cdot \text{Stab}_G(x) \cdot g^{-1}. \end{aligned}$$

Prin urmare, obținem proprietatea următoare:

**Propoziție 17.** Dacă  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  este o acțiune a unui grup  $G$  pe o mulțime  $M$ ,  $g \in G$ ,  $x \in M$ , iar  $y = g \cdot x$ , atunci

$$\text{Stab}_G(y) = g \cdot \text{Stab}_G(x) \cdot g^{-1}.$$

**Corolar 18.** Dacă  $x, y \in M$  au proprietatea că  $x \cdot G = y \cdot G$ , atunci  $\text{Stab}_G(x) \cong \text{Stab}_G(y)$ .

**Definiție 19.** Dacă  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  este o acțiune a unui grup  $G$  pe o mulțime  $M$ , iar  $g \in G$ , notăm cu  $\text{Fix}(g)$  mulțimea punctelor fixe în raport cu  $g$  prin acțiunea  $\alpha$ :

$$\text{Fix}(g) := \{x \in M \mid g \cdot x = x\}.$$

**Observație 20.** Pentru  $x \in M$  și  $g \in G$  avem că

$$x \in \text{Fix}(g) \iff g \cdot x = x \iff g \in \text{Stab}_G(x).$$

**Definiție 21.** Pentru o acțiune  $\alpha : G \times M \longrightarrow M : (g, x) \longmapsto g \cdot x$  vom nota cu  $Fix(\alpha)$  mulțimea punctelor fixe în raport cu acțiunea  $\alpha$ :

$$Fix(\alpha) = \bigcap_{g \in G} Fix(g) = \{x \in M | g \cdot x = x\}.$$

**Observație 22.** 1) Evident are loc echivalența

$$x \in Fix(\alpha) \iff Stab_G(x) = G.$$

2) De asemenea,

$$x \in Fix(\alpha) \iff G \cdot x = \{x\}.$$

**Corolar 23.** Dacă  $\alpha : G \times M \longrightarrow M : (g, x) \longmapsto g \cdot x$  este o acțiune, iar  $\mathcal{R}$  un sistem de reprezentanți ai orbitelor acțiunii în mulțimea  $M$ , atunci  $Fix(\alpha) \subseteq \mathcal{R}$ .

**Corolar 24.** Ecuația claselor asociată unei acțiuni  $\alpha : G \times M \longrightarrow M : (g, x) \longmapsto g \cdot x$  se poate scrie atunci în forma

$$|M| = |Fix(\alpha)| + \sum_{x \in \mathcal{R}^*} [G : Stab_G(x)],$$

unde  $\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \setminus Fix(\alpha)$ .

**Observație 25.** Pentru acțiunea prin conjugare a unui grup  $G$  pe el însuși, mulțimea punctelor fixe este centrul grupului  $G$ :

$$Z(G) = \{z \in G | gz = zg, (\forall)g \in G\}.$$

Dacă  $\mathcal{K}$  este un sistem de reprezentanți ai claselor de conjugare, atunci  $Z(G) \subseteq \mathcal{K}$ . Notăm  $\mathcal{K}^* = \mathcal{K} \setminus Z(G)$ .

**Corolar 26.** ecuația claselor grupului  $G$

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{K}^*} [G : C_G(x)].$$

**Definiție 27.** Fie  $p$  un număr prim. Un grup de ordin  $p^n$ , unde  $n \in \mathbb{N}$  este un număr natural, se numește un  $p$ -grup.

**Observație 28.** Orice subgrup al unui  $p$ -grup este de asemenea un  $p$ -grup. Indicele oricărui subgrup al unui  $p$ -grup este o putere a lui  $p$ .

**Propoziție 29.** Fie  $\alpha : G \times M \longrightarrow M : (g, x) \longmapsto g \cdot x$  o acțiune a unui  $p$ -grup  $G$  pe o mulțime finită  $M$ . Atunci

$$|Fix(\alpha)| \equiv |M| \pmod{p}.$$

**Corolar 30.** Dacă  $G$  este un  $p$ -grup, atunci  $p || Z(G)|$ . În particular,  $|Z(G)| \geq p$ .

**Observație 31.** Fie  $G$  un grup finit, iar  $p$  un număr prim care divide ordinul  $|G|$  al grupului  $G$ . Considerând mulțimea  $M = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in G^p \mid x_1 x_2 \dots x_p = 1\}$ , grupul aditiv  $\mathbb{Z}_p$  acționează pe  $M$  prin

$$\alpha : \mathbb{Z}_p \times M \longrightarrow M : (\hat{k}, (x_1, x_2, \dots, x_p)) \longmapsto (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+p}).$$

Atunci  $|M| = |G|^{p-1}$ , astfel că  $p \mid |Fix(\alpha)|$ . Cum  $(1, 1, \dots, 1) \in Fix(\alpha)$ , rezultă că  $Fix(\alpha) = \{(x, x, \dots, x) \in G^p \mid x^p = 1\} \neq \emptyset$  și numărul soluțiilor ecuației  $x^p = 1$  este un multiplu de  $p$ .

**Corolar 32. (teorema lui Cauchy)** Dacă  $G$  este un grup finit, cu ordinul divizibil prin numărul prim  $p$ , atunci există în grupul  $G$  elemente de ordin  $p$ .

**Observație 33.** Fie  $\alpha : G \times M \longrightarrow M : (g, x) \longmapsto g \cdot x$  o acțiune, iar  $\mathcal{F} \subseteq G \times M$  mulțimea

$$\mathcal{F} = \{(g, x) \in G \times M \mid g \cdot x = x\}.$$

Evident,

$$\mathcal{F} = \bigcup_{x \in M} Stab_G(x) \times \{x\} = \bigcup_{g \in G} \{g\} \times Fix(g),$$

astfel că

$$|\mathcal{F}| = \sum_{x \in M} |Stab_G(x)| = \sum_{g \in G} |Fix(g)|.$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |Fix(g)| &= \sum_{x \in \mathcal{R}} \sum_{y \in G \cdot x} |Stab_G(y)| = \sum_{x \in \mathcal{R}} \sum_{y \in G \cdot x} |Stab_G(x)| = \\ &= \sum_{x \in \mathcal{R}} [G : Stab_G(x)] \cdot |Stab_G(x)| = \sum_{x \in \mathcal{R}} |G| = |\mathcal{R}| |G|. \end{aligned}$$

Deoarece  $|\mathcal{R}|$  reprezintă numărul orbitelor, rezultă că

**Propoziție 34. (lema Cauchy-Frobenius)** Dacă  $\alpha : G \times M \longrightarrow M : (g, x) \longmapsto g \cdot x$  este o acțiune a unui grup finit  $G$  asupra unei mulțimi  $M$ , atunci numărul  $n$  al orbitelor acțiunii este dat de

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|.$$