Problema 1. *Se consideră următoarele şiruri de numere reale* $a_n = x^n + y^{n+1}$*,* $n \geq 0$ *şi* $b_n = x^n + y^n$*,* $n \geq 0$*, unde x şi y sunt numere reale pozitive. Să se demonstreze că:*

a) Dacă $a_{2012} \geq a_{2013}$*, atunci* $a_p \geq a_{p+1}$ *pentru orice număr natural p mai mic decât 2012.*

b) Dacă $a_{2012} \geq a_{2013}$*, atunci* $b_{2013} \leq 2$.

***

Soluţie:

a) Dacă x şi y sunt simultan egale cu 1, cerinţa este evidentă.

Dacă x=1 iar $y \neq 1$, atunci $a_{2012} \geq a_{2013} \Leftrightarrow y^{2012} \geq y^{2013} \Leftrightarrow y \in (0,1)$ şi, în acest caz, $a_p \geq a_{p+1}$. Analog se tratează cazul în care $x \neq 1$ şi y=1. Presupunem, în continuare, că x şi y sunt pozitive şi diferite de 1. Presupunem, prin reducere la absurd, că există un număr natural k mai mic decât 2012 astfel încât $a_{k-1} \leq a_k \geq a_{k+1}$. Atunci $x^{k-1} + y^k \leq x^k + y^{k+1}$ şi $x^k + y^{k+1} \geq x^{k+1} + y^{k+2}$. Adunând membru cu membru cele două inegalităţi şi trecând termenii în acelaşi membru obţinem $x^{k-1}(x-1)^2 + y^k(y-1)^2 \leq 0$, relaţie imposibilă în condiţiile date. Aşadar, presupunerea făcută este falsă, deci, $a_p \geq a_{p+1}$ pentru orice număr natural p mai mic decât 2012.

b) Ideea de bază constă în demonstrarea implicaţiei $a_k \geq a_{k+1} \Rightarrow b_k \geq b_{k+1}$ (@), pentru orice număr natural k mai mic sau egal cu 2012.

Deoarece $a_{2012} \geq a_{2013}$, rezultă, conform punctului anterior, că $a_k \geq a_{k+1}$. Pentru a încheia demonstrarea implicaţiei (@), presupunem, prin reducere la absurd, că există un număr k astfel încât $b_k < b_{k+1}$. Din relaţiile $a_k \geq a_{k+1}$ şi $b_k < b_{k+1}$ vom obţine $x^k + y^k < x^{k+1} + y^{k+1}$ şi $x^{k+1} + y^{k+2} \leq x^k + y^{k+1}$. Adunând ultimele două inegalităţi deducem că $y^k(y-1)^2 < 0$, relaţie evident falsă. Aşadar presupunerea făcută este falsă, deci şirul $(b_n)_{n\geq 0}$ este descrescător şi astfel $b_{2013} \leq \ldots \leq b_0 = 2$.