Problema 4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia:

$$\left[\sqrt{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}\right]+\left[\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}\right]+\ldots+\left[\sqrt{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}\right]=2023.$$

***

Soluţie. Fie $p \in \mathbb{N}^*$. Pentru fiecare număr natural k astfel încât $p^2 \leqslant k < (p+1)^2$, avem: $p^2 \leqslant k < \sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1} < k+1 \leqslant (p+1)^2$, deci

$$p < \sqrt{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}} < p+1.$$

Aşadar $\left[\sqrt{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}}\right]=p$, pentru $2p+1$ valori ale lui k.

Rezultă: $\left[\sqrt{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}\right]=1,$

$$\left[\sqrt{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{7}\cdot\sqrt{8}}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{8}\cdot\sqrt{9}}\right]=2$$

şi relaţiile analoage.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, fie $m \in \mathbb{N}^*$, cu $m^2 \leqslant n < (m+1)^2$. Ecuaţia devine:

$$1\cdot(2\cdot 1+1)+2\cdot(2\cdot 2+1)+\ldots+(m-1)(2\cdot(m-1)+1)+m\cdot s=2023,$$

unde $s=n-m^2 \in \{0,1,2,\ldots,2m-2\}$. Obţinem succesiv:

$$2\cdot 1^2+1+2\cdot 2^2+2+\ldots 2\cdot(m-1)^2+(m-1)+m\cdot s=2023,$$

$$2\cdot\left(1^2+2^2+\ldots+(m-1)^2\right)+(1+2+\ldots+(m-1))+m\cdot s=2023, \quad (*)$$

$$2\cdot\frac{(m-1)\cdot m\cdot(2(m-1)+1)}{6}+\frac{m(m-1)}{2}+m\cdot s=2023,$$

$$2m(m-1)(2m-1)+3m(m-1)+6ms=6\cdot 2023. \qquad (**)$$

Deducem că m este divizor al numărului $6\cdot 2023=2\cdot 3\cdot 7\cdot 17^2$.
Deoarece $2m(m-1)(2m-1)<6\cdot 2023$, rezultă că $m\in\{1,2,3,6,7,14\}$.
Fiindcă $s\leqslant 2m-2$, obţinem:

$$2m(m-1)(2m-1)+3m(m-1)+6m(2m-2)\geqslant 6\cdot 2023,$$

deci $m(m-1)(4m+13)\geqslant 6\cdot 2023$, de unde rezultă că $m>7$. Aşadar $m=14$.
Înlocuind $m=14$ în $(**)$, obţinem $s=21$ şi apoi $n=217$.

Observaţie: Valoarea lui s se poate afla din ecuaţia $(*)$ prin înlocuiri ale lui m cu valori naturale, până când membrul stâng devine egal cu 2023.