P4. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^*$ o funcţie care admite primitive, iar $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Arătaţi că funcţia fg admite primitive.

S. Fie F o primitivă a funcţiei f. Deoarece $F' = f$ nu se anulează , F' păstrează semn constant pe intervalul I, astfel că F este strict monotonă pe I. Considerând intervalul $J = F(I)$, funcţia $H : I \longrightarrow J$, definită prin $H(t) = F(t)$, $(\forall)t \in I$, este continuă şi bijectivă, astfel că are o inversă $K : J \longrightarrow I$, care este de asemenea continuă şi bijectivă. Fie G o primitivă a funcţiei continue $g \circ K$. Atunci $G \circ H$ este derivabilă, ca şi compusă a două funcţii derivabile, şi

$$(G \circ H)' = (G' \circ H) \cdot H' = (g \circ K \circ H) \cdot F' = g \cdot f.$$

Rezultă că fg este derivata funcţiei $G \circ H$, deci admite primitive.