Clasa a X-a - Etapa 4

Problema 2. *Studiaţi dacă există funcţii crescătoare* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *care verifică relaţia:*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 3xy(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

***

Soluţie. Ipoteza este echivalentă cu

$$f(x+y) + (x+y)^3 = f(x) + x^3 + f(y) + y^3, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Cu notaţia $g(x) = f(x) + x^3$, deducem că funcţia g verifică ecuaţia funcţională Cauchy. În plus, observăm că g este crescătoare. Folosind Teorema 4 din lecţie, deducem că există $a \geq 0$ astfel încât

$$g(x) = ax, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Obţinem

$$f(x) = ax - x^3, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se verifică uşor că această funcţie nu satisface ipotezele problemei deoarece nu este crescătoare pe $\mathbb{R}$. Prin urmare, nu există funcţii care să îndeplinească condiţiile din enunţ.