Problema 4. Determinaţi toate perechile (A, B) de mulţimi care verifică condiţiile:
(a) $A \cup B = \mathbb{Z}$,
(b) dacă $x \in A$, atunci $x - 1 \in B$,
(c) dacă $x \in B$ şi $y \in B$, atunci $(x + y) \in A$.

Test selecţie OIM - 2002

Soluţie:

- Dacă $0 \in B$, atunci din (c) avem că: pentru orice $x \in B$ se obţine $(x + 0) \in A$, deci $B \subset A$ şi ţinând cont de (a) deducem $A_1 = B_1 = \mathbb{Z}$
- Dacă $0 \notin B$, atunci din (a) avem $0 \in A$ şi din (b): $-1 \in B$. Folosind (b) obţinem succesiv $-2 = -1 - 1 \in A$, $-3 \in B$, $-4 \in A$ şi inductiv: $-2n \in A$, $-2n - 1 \in B$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
- Dacă $2 \in B$, atunci $2 + (-1) = 1 \in A$ şi $1 - 1 = 0 \in B$, contradicţie: aşadar $2 \in A$ şi $2 - 1 = 1 \in B$.
  Vom demonstra acum că $2n \in A, \forall n \in \mathbb{N}$. Presupunând contradictoriul, considerăm cel mai mic $n \in \mathbb{N}, n > 1$, pentru care $2n \in B$, de unde $2n - 1 \in A$ şi din (b) avem $(2n - 1) - 1 = 2(n - 1) \in B$, contradicţie cu condiţia de minimalitate.
  În concluzie, toate numerele naturale pare aparţin mulţimii A şi nu aparţin lui B, iar cele impare sunt în B şi nu aparţin lui A.
  Dacă $(2p + 1) \in A$ atunci din (b) am avea $2p \in B$, fals. Aşadar $A_2 = 2\mathbb{Z}$ şi $B_2 = 2\mathbb{Z} + 1$, perechile cerute fiind $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$.