COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2012
TESTE DE SELECŢIE SENIORI

Abstract. Comments on some of the problems given at the Selection Tests after the National Mathematics Olympiad 2012.

Data: 29 mai 2012.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Această prezentare, însoţită de comentarii asupra Testelor de Selecţie de după Faza Naţională a Olimpiadei de Matematică este, din nou, după cum v-am obişnuit, opinia personală a autorului.[1]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile personale.

2. Seniori – Test 1

Subiectul (1). *Fie $n_1, \ldots, n_k$ numere naturale nenule, şi fie $d_1 = 1$ şi*

$$d_i = \frac{(n_1, \ldots, n_{i-1})}{(n_1, \ldots, n_i)} \text{ pentru orice } 2 \le i \le k.$$

Să se arate că sumele

$$\sum_{i=1}^{k} a_i n_i,\ a_i \in \{1, \ldots, d_i\},\ 1 \le i \le k$$

sunt distincte modulo n_1.

Soluţie. Ideea de bază este ca din $n \mid a - b$, unde $a, b \in \{1, \ldots, n\}$, să se deducă $a = b$.[2]

Mulţumirile mele sincere celor cu care am dialogat cu privire la problemele propuse şi la efectele dorite, discuţii care au condus la materialul de faţă.

[1]Consultaţi soluţiile oficiale ale testului 1 la `http://onm2012.isjcta.ro/subiecte.php`.

[2]Idee care apare frecvent în probleme de aritmetică, de exemplu în demonstrarea teoremei lui Sylvester-Frobenius, unde având două numere naturale nenule coprime m şi n, numerele $N + im$, $1 \le i \le n$, dau resturi distincte la împărţirea prin n, căci dacă $n \mid (N + jm) - (N + km) = (j - k)m$, pentru nişte $1 \le k < j \le n$, atunci şi $n \mid j - k$, iar cum $0 \le j - k \le n - 1$, rezultă o contradicţie.

Considerând două astfel de sume $\sum_{i=1}^{k} a_i n_i$ şi $\sum_{i=1}^{k} b_i n_i$, presupunem deci $n_1 \mid \sum_{i=1}^{k}(a_i - b_i)n_i$. Fie j cel mai mare indice pentru care $a_j \neq b_j$. Pentru a introduce în joc faptul că $a_j, b_j \in \{1, \ldots, d_j\}$ (jucând rolul numerelor a,b şi n menţionate mai sus), unde $d_j = \dfrac{(n_1, \ldots, n_{j-1})}{(n_1, \ldots, n_j)}$, să observăm că $(n_1, \ldots, n_{j-1}) \mid n_1$ şi $(n_1, \ldots, n_{j-1}) \mid n_i$ pentru orice $2 \leq i \leq j-1$, deci $(n_1, \ldots, n_{j-1}) \mid (a_j - b_j)n_j$.

Dar numerele d_j şi $\dfrac{n_j}{(n_1, \ldots, n_j)}$ sunt coprime. Rezultă că $d_j \mid a_j - b_j$, de unde concluzia. $\square$

Subiectul (4)**.** *Să se arate că muchiile unui graf planar finit simplu (fără bucle şi fără muchii multiple) pot fi orientate astfel încât din orice vârf să iasă cel mult trei săgeţi.*

Soluţie. Definiţiile complete pentru *graf planar* ar fi trebuit fi date în enunţul problemei ...

O soluţie alternativă este prezentă în [M. Chrobak, D. Eppstein – *Planar Orientation with Low Out-Degree* ..., 1989]

Fie o reprezentare planară a lui G, şi fie faţa F nemărginită. Numim un vârf v al lui G sau *exterior*, dacă v se află pe faţa F, sau *interior* în caz contrar. Vom demonstra o versiune "mai tare".

Teoremă. *Fiecare graf planar G admite o orientare astfel încât $\deg^+_G(v) \leq 2$ pentru orice vârf v exterior şi $\deg^+_G(v) \leq 3$ pentru orice vârf v interior.*

Demonstraţie. Inducţie după $|G|$. Există un vârf exterior v adiacent cu cel mult 2 alte vârfuri exterioare. (De fapt există cel puţin două astfel de vârfuri, deoarece subgraful lui G indus de vârfurile exterioare este de tip *outerplanar*). Fie $G' = G - v$ subgraful lui G obţinut prin eliminarea vârfului v, care are ca vârfuri exterioare restul vârfurilor exterioare ale lui G, împreună cu vecinii lui v. Din ipoteza de inducţie, G' admite o orientare astfel încât $\deg^+_{G'}(w) \leq 2$ pentru orice vârf w exterior şi $\deg^+_{G'}(w) \leq 3$ pentru orice vârf w interior. Acum orientăm muchiile (v, x) între v şi fiecare dintre vecinii săi. Dacă x este exterior în G, orientăm muchia (v, x) de la v către x; altfel o orientăm de la x către v. Se vede uşor că orientarea rezultată satisface cerinţele teoremei. $\square$

3. Seniori – Test 2

Subiectul (1)**.** *Să se arate că, oricare ar fi numărul întreg $n \geq 2$, avem identitatea*

$$\sum_{k=2}^{n} \lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor = \sum_{k=2}^{n} \lfloor \log_k n \rfloor .$$

Soluţie. [3]

$$\sum_{k=2}^{n} \lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor = \sum_{k=2}^{n} \left(1 + \sum_{\ell=2}^{n} [\![\ell^k \le n]\!]\right) = \sum_{\ell=2}^{n} \left(1 + \sum_{k=2}^{n} [\![\ell^k \le n]\!]\right) = \sum_{\ell=2}^{n} \lfloor \log_\ell n \rfloor. \quad \square$$

Subiectul (2)**.** *Fie $ABCD$ un patrulater convex circumscriptibil, astfel încât*

$$\angle ABC + \angle ADC < 180^\circ \quad \text{şi} \quad \angle ABD + \angle ACB = \angle ACD + \angle ADB.$$

Să se arate că una din diagonalele patrulaterului $ABCD$ trece prin mijlocul celeilalte.

Soluţie. De fapt rezultă că patrulaterul $ABCD$ este un *kite* (în particular, romb). $\square$

Subiectul (3)**.** *Să se determine numărul maxim de regi care pot fi plasaţi pe o tablă de şah de dimensiuni 12×12, astfel încât fiecare rege să ameninţe exact un alt rege.*

Soluţie. Următorul model plasează 56 de regi în condiţiile date.

4	**4**	4	**4**	**4**	4	**4**	**4**	4	**4**	4	**4**
4	4	4	4	4	4	4	4	4	**4**	4	**4**
4	**4**	4	**4**	**4**	4	**4**	**4**	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	**4**	4	**4**
4	4	**4**	4	**4**	4	**4**	**4**	4	**4**	4	**4**
4	4	**4**	4	**4**	**3**	**3**	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	**3**	**3**	**4**	4	**4**	4	**4**
4	4	**4**	4	**4**	**4**	4	**4**	4	**4**	4	**4**
4	4	**4**	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	**4**	**4**	4	**4**	**4**	4	**4**	**4**
4	4	**4**	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	**4**	4	**4**	**4**	4	**4**	**4**	4	**4**	**4**

O pereche de regi care se atacă (reciproc) stau pe pătrate adiacente, sau ortogonal, sau diagonal. Dacă ortogonal, adunăm numerele din tabelul din stânga la pătratele înconjurătoare. Dacă diagonal, adunăm numerele din tabelul din dreapta la pătratele înconjurătoare. Peste tot, regii sunt **4**.

1	2	2	1
2	**4**	**4**	2
1	2	2	1

Sumă 24.

1	2	2	
2	**4**	3	1
1	3	**4**	2
	1	2	1

Sumă 28.

[3]Fiind dat un predicat logic $\mathcal{P}$, vom folosi notaţia, popularizată de D. Knuth, $[\![\mathcal{P}]\!] = 1$ dacă $\mathcal{P}$ este adevărat, dar $[\![\mathcal{P}]\!] = 0$ dacă $\mathcal{P}$ este fals. Atunci, din principiul lui Fubini, avem soluţia într-un rând.

Se verifică uşor că oricum s-ar plasa regii, suma numerelor din orice pătrat nu depăşeşte valoarea 4. Mai mult, pătratele imediat dincolo de marginile tablei au suma cel mult 2, iar pătratele imediat dincolo de colţurile tablei au suma cel mult 1. Modul cel mai simplu de a vedea aceasta este să partiţionăm fiecare pătrat în patru cadrane, şi să ne imaginăm că fiecare rege ocupă o arie 2×2 centrată în pătratul unde se află. Aceste arii 2×2 se suprapun (parţial) dacă şi numai dacă regii se atacă reciproc. Numerele de mai sus reprezintă câte cadrane din fiecare pătrat sunt acoperite de aceste arii 2×2. Bazat pe cele de mai sus, putem calcula că suma maximă a numerelor din toate aceste pătrate este $4 \cdot 12^2 + 2 \cdot 4 \cdot 12 + 1 \cdot 4 = 676$. Plasarea a doi regi adiacent ortogonal dă o sumă de 24, iar plasarea a doi regi adiacent diagonal dă o sumă de 28. Prin urmare numărul maxim de perechi de regi este $\lfloor 676/24 \rfloor = 28$, adică maximum 56 regi. De aici, ideea construirii modelului vine din realizarea faptului că estimarea de mai sus este chiar foarte bună ($24 \cdot 28$ este doar cu 4 mai puţin decât 676) şi deci trebuie să ne asigurăm că fiecare pătrat din colţurile şi marginile tablei are suma 4. Modelul rezultat are o simpatică simetrie de rotaţie cu $\pi/2$. $\square$

Subiectul (4)**.** *Fie k un număr natural nenul. Să se determine valoarea maximă a expresiei*

$$a^{3k-1}b + b^{3k-1}c + c^{3k-1}a + k^2a^kb^kc^k,$$

unde a, b, c sunt numere reale ne-negative astfel încât $a + b + c = 3k$.

Soluţie. $\square$

4. Seniori – Test 3

Subiectul (1)**.** *Fie m şi n două numere întregi mai mari decât 1. Să se arate că există m numere naturale nenule $N_1, \ldots, N_m$, astfel încât*

$$\sqrt{m} = \sum_{k=1}^{m} \left(\sqrt{N_k} - \sqrt{N_k - 1} \right)^{1/n}.$$

Soluţie. Scriind $\sqrt{m} = \sum_{k=1}^{m} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1} \right)$ (inversul unei telescopări), este suficient să arătăm că $\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1} \right)^n = \sqrt{N_k} - \sqrt{N_k - 1}$ pentru un anume natural nenul N_k. Demonstraţia acestui fapt urmează.[4]

Pentru $n = 2p - 1$ impar, $p \geq 1$, prin simplă inducţie rezultă că există două şiruri de numere naturale $(a_p)_{p\geq 1}$ şi $(b_p)_{p\geq 1}$, astfel încât

$$\left(\sqrt{k} + \sqrt{k-1} \right)^{2p-1} = a_p\sqrt{k} + b_p\sqrt{k-1}.$$

[4]Ca atare, problema a apărut în [2009 USAMTS, Round 1, Problem 5].

Rezultă relaţiile de recurenţă, începând cu valori iniţiale $(a_1, b_1) = (1, 1)$, $a_{p+1} = (2k-1)a_p + 2(k-1)b_p$ şi $b_{p+1} = (2k-1)b_p + 2ka_p$. Din proprietăţile conjugatelor, avem şi

$$\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)^{2p-1} = a_p\sqrt{k} - b_p\sqrt{k-1}.$$

Înmulţind cele două relaţii obţinem $1 = ka_p^2 - (k-1)b_p^2$. Prin urmare

$$\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)^{2p-1} = \sqrt{ka_p^2} - \sqrt{(k-1)b_p^2} = \sqrt{ka_p^2} - \sqrt{ka_p^2 - 1}.$$

Avem însă şi $\left(\sqrt{N} - \sqrt{N-1}\right)^2 = \sqrt{(2N-1)^2} - \sqrt{(2N-1)^2 - 1}$ pentru orice $N \geq 1$, ceea ce, în combinaţie cu cele de mai sus, produce rezultatul cerut, căci putem scrie $n = 2^s(2p-1)$ pentru nişte anume $s \geq 0$, $p \geq 1$. □

Subiectul (2)**.** *Fie γ un cerc şi ℓ o dreaptă în planul său. Fixăm un punct K pe dreapta ℓ, situat în exteriorul cercului γ, şi ducem tangentele KA şi KB la cercul γ, unde A şi B sunt pe γ. Fie P şi Q două puncte pe γ. Dreptele PA şi PB intersectează dreapta ℓ în punctele R, respectiv S, iar dreptele QR şi QS intersectează a doua oară cercul γ în punctele C, respectiv D. Să se arate că dreapta ℓ şi tangentele la cercul γ în punctele C, respectiv D, sunt concurente.*

Soluţie. (C. Pohoaţă) Teorema lui Pascal aplicată hexagonului $DAPBCQ$ implică $DA \cap BC \in \ell$. Aceeaşi teoremă Pascal pentru $DBBCAA$ implică coliniaritatea punctelor $DB \cap CA$, K şi $BC \cap AD$, de unde $DB \cap CA \in \ell$. Finalmente, iar teorema Pascal, aplicată acum pentru $DDACCB$, implică $CC \cap DD \in \ell$ (adică intersecţia tangentelor în C, respectiv D, la cercul γ se află pe dreapta ℓ), căci ℓ este dreapta determinată de $DA \cap CB$ şi $AC \cap BD$. □

Subiectul (3)**.** *Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere naturale nenule, şi a un număr natural mai mare decât 1, care este divizibil cu produsul $a_1a_2\cdots a_n$. Să se arate că (dimpotrivă) numărul $a^{n+1} + a - 1$ nu este divizibil cu produsul $(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1)\cdots(a + a_n - 1)$.*

Soluţie. Fie $a = Na_1a_2\cdots a_n$. Presupunem, prin absurd, că

$$a^{n+1} + a - 1 = M(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1)\cdots(a + a_n - 1).$$

Modulo $a-1$ aceasta dă $1 \equiv Ma_1a_2\cdots a_n \pmod{a-1}$. Dar nu putem avea $a_i = 1$ pentru niciun $1 \leq i \leq n$, căci atunci am avea $a \mid a^{n+1} + a - 1$, deci $a = 1$, absurd. Aşadar $M(a+a_1-1)(a+a_2-1)\cdots(a+a_n-1) \geq M(a+1)^n$, deci $M \leq \dfrac{a^{n+1} + a - 1}{(a+1)^n} \leq a - 1$. Dar, evident, $1 \equiv a \pmod{a-1}$, adică $1 \equiv Na_1a_2\cdots a_n \pmod{a-1}$. Atunci $a - 1 \mid (M-N)a_1a_2\cdots a_n$, şi cum $(a-1, a_1a_2\cdots a_n) = 1$, iar $1 \leq M, N \leq a-1$, rezultă $M = N$. Dar atunci $N \mid a^{n+1} + a - 1$, de unde $N = 1$.

Acum, modulo a avem $-1 \equiv (a_1-1)(a_2-1)\cdots(a_n-1) \pmod{a_1a_2\cdots a_n}$, de unde $(a_1-1)(a_2-1)\cdots(a_n-1) = a_1a_2\cdots a_n - 1$, ceea ce nu este posibil decât pentru $n = 1$. Acest lucru revine la $a^2 + a - 1 = 2a - 1$, adică $a(a-1) = 0$, imposibil căci $a > 1$. $\square$

Remarcă. Aceeaşi metodă funcţionează până aproape de final, dacă lucrăm cu $a^{n+1} - a + 1$. Acum, modulo a avem $1 \equiv (a_1 - 1)(a_2 - 1)\cdots(a_n - 1) \pmod{a_1 a_2 \cdots a_n}$, de unde $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 2$, ceea ce duce la relaţia $(2^n)^{n+1} - 2^n + 1 = (2^n + 1)^n$. Dar $2^n - \dfrac{2^n - 1}{2^{n^2}} > 3 > \left(\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)^{2^n}\right)^{n/2^n}$ dacă $n > 1$, şi astfel rămâne doar posibilitatea $n = 1$, $a = a_1 = 2$, când într-adevăr $a^{n+1} - a + 1 = 3 = a + a_1 - 1$.

Subiectul (4)**.** *Fie S o mulţime de numere naturale nenule. Fiecare număr din S are exact 100 de cifre în baza 10. Un număr din S se numeşte* **atom** *dacă nu este divizibil cu suma a două numere (nu neapărat distincte) din S. Să se determine numărul maxim de elemente pe care le poate avea S, dacă S conţine cel mult 10 atomi.*

Soluţie. $\square$

5. Seniori – Test 4

Subiectul (1)**.** *Fie ABC un triunghi. Bisectoarea interioară a unghiului CAB, respectiv ABC, intersectează latura BC, respectiv CA, în punctul D, respectiv E. Să se arate că*

$$DE \leq (3 - 2\sqrt{2})(AB + BC + CA)$$

şi să se determine cazurile de egalitate.

Soluţie. Inegalitatea corespunzătoare în a, b, c, laturile triunghiului, se poate obţine din formule de coordonate baricentrice, sau pur şi simplu din formula lungimii bisectoarei şi teorema cosinusului. Apoi, Dumnezeu cu mila ... $\square$

Subiectul (2)**.** *Fie $f, g\colon \mathbb{Z} \to [0, \infty)$, având $f(n) = g(n) = 0$, cu excepţia unui număr finit de numere întregi n. Definim funcţia $h\colon \mathbb{Z} \to [0, \infty)$ prin*

$$h(n) = \max\{f(n-k)g(k) \ : \ k \in \mathbb{Z}\}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Fie p şi q două numere reale pozitive, astfel încât $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Să se arate că

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n) \geq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n)^q\right)^{1/q}.$$

Soluţie. $\square$

Remarcă. Notaţia standard este $\operatorname{supp}(f) = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ f(n) \neq 0\}$; mulţimea $\operatorname{supp}(f)$ se numeşte *suportul* lui f. Avem deci funcţiile f şi g, ambele de suport finit. Este clar din definiţia lui h că $\operatorname{supp}(h) = \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$, deci h este de asemenea de suport finit (ceea ce este esenţial în buna definire a expresiei $\sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n)$).

Subiectul (3)**.** *Să se determine mulţimile finite S de puncte în plan, având proprietatea că dacă $x, y, x', y' \in S$, iar segmentele închise xy şi $x'y'$ au un singur punct comun z, atunci $z \in S$.*

Soluţie. Soluţia mea se bazează pe faptul că dacă cele n puncte ale unei astfel de mulţimi S sunt în poziţie generală (trei câte trei necoliniare), atunci $n \leq 4$. Aceasta reiese din faptul că un graf complet K_n, $n \geq 5$, nu este planar, deci două muchii (segmente) se vor intersecta într-un punct care nu este vârf al grafului. Pentru $n \leq 4$ mulţimile S acceptabile pot fi enumerate ca fiind

- $n = 1$; o mulţime formată dintr-un singur punct;
- $n = 2$; o mulţime formată din două puncte;
- $n = 3$; o mulţime formată din trei puncte necoliniare (triunghi);
- $n = 4$; o mulţime formată din trei puncte necoliniare, plus al patrulea, interior triunghiului format de primele trei (un K_4 planar geometric).

Dacă există $m \geq 3$ puncte coliniare, fie ℓ dreapta lor de suport. Un argument, împrumutat din celebra demonstraţie a lui Kelly pentru problema lui Sylvester, foloseşte un punct $P \notin \ell$ cel mai apropiat de dreapta ℓ; dacă un alt punct $Q \notin \ell$ se află de aceeaşi parte a lui ℓ ca şi P, atunci trebuie ca $m = 3$ şi $PQ \cap \ell \in S$. O simplă analiză a cazurilor posibile, pentru puncte aflate de o parte sau de alta a dreptei ℓ, şi pentru $m \geq 4$, respectiv $m = 3$, identifică toate configuraţiile posibile, dintre care doar una este într-adevăr interesantă (şi mai greu de găsit), anume cu 6 puncte situate în trei grupe de câte trei puncte coliniare. $\square$

6. Seniori – Test 5

Subiectul (1)**.** *Determinaţi toate tripletele (a, b, c) de numere întregi (strict) pozitive cu proprietatea că, pentru orice număr prim p, dacă n este rest pătratic modulo p, atunci şi $an^2 + bn + c$ este rest pătratic.*

Soluţie. Alegem $n = m^2$ şi deci $am^4 + bm^2 + c$ este rest pătratic modulo p pentru orice prim p, deci un pătrat perfect (folosind un rezultat cunoscut care afirmă că N este rest pătratic modulo orice prim dacă şi numai dacă N este pătrat perfect). Dar atunci polinomul $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$ este pătratul unui polinom $Q(x)$ cu coeficienţi întregi (un alt rezultat cunoscut, care afirmă că un polinom cu coeficienţi întregi este o putere perfectă k pentru orice argument întreg dacă şi numai dacă este puterea k a unui alt polinom cu coeficienţi întregi).[5]

Avem atunci $P(m) = am^4+bm^2+c = Q(m)^2$ pentru un polinom $Q \in \mathbb{Z}[x]$, care trebuie să fie de forma $Q(x) = dx^2+e$, deci $(a, b, c) = (d^2, 2de, e^2)$ pentru nişte numere întregi (strict) pozitive d, e. $\square$

[5] Mi se spune că invocarea acestui rezultat nu ar fi fost acceptată, în timp ce invocarea primului rezultat, da. Ambele afirmaţii sunt *folclor*, şi nu mai am nici nerv, nici răbdare, să combat şi să comentez mai departe. În aceste condiţii, problema **nu trebuia dată**.

Remarcă. Primul rezultat anunţat nu apare ca teoremă cu nume în cartea lui Hardy şi Wright. Voi prezenta o demonstraţie, bazată pe un articol al lui M. Hall din 1933, pentru a vedea că rezultatul nu este trivial.

Teoremă. *Un număr întreg pozitiv N care este rest pătratic modulo orice prim (care nu îl divide) este pătrat perfect.*

Demonstraţie. *Fie $N = j^2 n$, unde $n = \prod_{k=1}^{s} p_k$ este liber de pătrate. Este suficient să demonstrăm teorema pentru n; să presupunem $n > 1$. Deoarece o putere impară a lui 2 nu este rest pătratic modulo 3, putem presupune că n are un factor prim impar, fie el p_s. Fie a un ne-rest pătratic modulo p_s; sistemul de congruenţe $x \equiv 1 \pmod 4$ (ba chiar $x \equiv 1 \pmod 8$ dacă $2 \mid n$), $x \equiv a \pmod{p_s}$ şi $x \equiv 1 \pmod{p_k}$ pentru $1 \le k \le s-1$ are o soluţie întreagă x_0, din lema Chineză a Resturilor. Dar atunci toate elementele progresiei aritmetice $\{x_0 + 4mn \mid m \in \mathbb{N}\}$ sunt soluţii. Cum x_0 şi $4n$ sunt coprime, din teorema lui Dirichlet rezultă că progresia conţine infinit de multe numere prime $p > j$. Dar atunci, din proprietăţile simbolului lui Legendre, avem*

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \prod_{k=1}^{s} \left(\frac{p_k}{p}\right) = -1,$$

căci $\left(\frac{p_s}{p}\right) = \left(\frac{p}{p_s}\right) = -1$, în timp ce $\left(\frac{p_k}{p}\right) = \left(\frac{p}{p_k}\right) = +1$ pentru $1 \le k \le s-1$. Rezultă n (şi deci şi N) ne-rest pătratic modulo p, absurd. ■

Al doilea rezultat primeşte următoarea soluţie oficială (uşor modificată aici, pentru clarificare şi simplificarea raţionamentelor).

Rezultat. *Dacă $am^4 + bm^2 + c = k_m^2$ pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, cu k_m întreg pozitiv, atunci există întregii d, e astfel încât $am^4 + bm^2 + c = (dm^2 + e)^2$.*

Soluţie. *Avem $bm^2 + c = (k_m - m^2\sqrt{a})(k_m + m^2\sqrt{a})$. Notând $t_m = k_m - m^2\sqrt{a}$, avem deci $bm^2 + c = t_m(t_m + 2m^2\sqrt{a})$, adică $t_m^2 + 2m^2\sqrt{a}t_m - (bm^2 + c) = 0$, de unde*

$$t_m = -m^2\sqrt{a} + \sqrt{am^4 + bm^2 + c} = \frac{bm^2 + c}{m^2\sqrt{a} + \sqrt{am^4 + bm^2 + c}}.$$

Aşadar $\lim_{m\to\infty} t_m = \lim_{m\to\infty} \frac{bm^2 + c}{m^2\sqrt{a} + \sqrt{am^4 + bm^2 + c}} = \frac{b}{2\sqrt{a}}$.
Acum, avem $t_{m+2} - 2t_{m+1} + t_m = k_{m+2} - 2k_{m+1} + k_m - 2\sqrt{a}$, deci şirul de întregi $(k_{m+2} - kt_{m+1} + k_m)_{m\ge1}$ converge la $2\sqrt{a}$, care trebuie aşadar să fie un număr întreg, de unde $a = d^2$. Rezultă că şirul $(t_m)_{m\ge1}$ este şi el format din numere întregi,

deci limita sa $\dfrac{b}{2\sqrt{a}} = \dfrac{b}{2d}$ *trebuie aşadar să fie un număr întreg, de unde* $b = 2de$. *Finalmente, deoarece vom avea* $k_m = t_m + dm^2 = e + dm^2$ *pentru* m *suficient de mare, rezultă* $c = k_m^2 - (d^2m^4 + 2dem^2) = e^2$, *şi rezultatul este obţinut.* ■

Subiectul (2)**.** *Fiind dat un număr întreg (strict) pozitiv* n, *evaluaţi suma*

$$\sum_{(n)} \sum_{k=1}^{n} e_k 2^{e_1+e_2+\cdots+e_k-2k-n}$$

unde $e_k \in \{0,1\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *iar suma* $\sum_{(n)}$ *se face peste toate alegerile posibile ale* n*-tupletelor* $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$*.*

Soluţie. Pentru toţi $1 \le \ell \le k \le n$, fie $S_{k,\ell}$ mulţimea n-tupletelor binare $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ cu $e_k = 1$ şi $e_1 + e_2 + \cdots + e_k = \ell$. Se vede imediat că $|S_{k,\ell}| = 2^{n-k}\dbinom{k-1}{\ell-1}$, căci primele $k-1$ poziţii trebuie să conţină exact $\ell - 1$ valori 1, iar ultimele $n-k$ poziţii pot fi alese în mod arbitrar. Atunci suma cerută este egală cu $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k} |S_{k,\ell}| 2^{\ell-2k-n}$, adică

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k} 2^{n-k}\binom{k-1}{\ell-1}2^{\ell-2k-n} = \sum_{k=1}^{n} 2^{1-3k}\sum_{\ell=1}^{k}\binom{k-1}{\ell-1}2^{\ell-1} = \sum_{k=1}^{n} 2^{1-3k}\cdot 3^{k-1}$$

iar

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{1-3k}\cdot 3^{k-1} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1} = \frac{2}{5}\left(1 - \left(\frac{3}{8}\right)^{n}\right).$$

□

Soluţie Alternativă. Fie $\sigma(n)$ suma cerută. Este clar că $\sigma(1) = \dfrac{1}{4}$, şi că

$$\sigma(n) = \sum_{(n)}\sum_{k=1}^{n} e_k 2^{e_1+e_2+\cdots+e_k-2k-n} = \sigma(n-1) + \sum_{\ell=1}^{n}\binom{n-1}{\ell-1}2^{\ell-3n}.$$

Prin urmare $\sigma(n) = \sigma(n-1) + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{8}\right)^{n-1}$, căci

$$\sum_{\ell=1}^{n}\binom{n-1}{\ell-1}2^{\ell-3n} = \frac{1}{2^{3n-1}}\sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{\ell-1}2^{\ell-1} = \frac{3^{n-1}}{2^{3n-1}} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}.$$

Prin recurenţă se obţine $\sigma(n) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{8}\right)^{k} = \frac{2}{5}\left(1 - \left(\frac{3}{8}\right)^{n}\right).$ □

Subiectul (3). *Fiind date numerele întregi* $0 < m < n$, *fie* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *puncte distincte în discul unitate închis, măcar unul dintre ele găsindu-se pe frontiera discului. Arătaţi că există* m *puncte* $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_m}$ *dintre punctele date, având centrul de greutate la distanţă cel puţin* $\dfrac{n}{n+2m(n-1)}$ *de centrul discului.*

Soluţie. □

7. Încheiere

Corectura, deoarece contestaţii nu sunt permise, ar trebui să fie fără cusur. Pierderea încrederii elevilor în cei care dirijează competiţia, dar care se dovedesc opaci la soluţiile care nu respectă întocmai baremul, este lucrul cel mai dăunător care poate greva acest prilej de bucurie şi întrecere de talente care este olimpiada de matematică.

Nu trebuie decât să ne uităm la corectura problemei 1 de la testul 1, ca să înţelegem efectele letale ale unei corecturi de proastă calitate. Iar fără punctele de *carry-over* de la clasă, rezultatele acestui test 1 au fost cam proaste, n'est-ce-pas? Deşi problemele (cu excepţia problemei 2) au fost foarte frumoase (din păcate niciuna original compusă), poate că au fost, ca ansamblu, puţin cam grele pentru nivelul actual al competiţiei.

Acum, după re-corectarea testului 1, se vede efectul proastei corecturi iniţiale la problema 1, clasamentul primilor 7 (care au format echipa de Balcaniadă) fiind schimbat nominal, înainte de începerea celorlalte teste.

În altă ordine de idei, sunt curios câte dintre problemele utilizate sunt originale, şi câte sunt doar "împrumutate" din diverse surse (a căror origine este şi ea interesantă; vezi întâmplarea cu Problema 4 de la Balcaniada de Matematică 2012). De asemenea, numărul redus, de doar cinci teste de selecţie (şi deci numărul problemelor cerute), a fost relativ mic, şi poate nu suficient de reprezentativ.

Rezultatele selecţiei pentru echipa de Olimpiadă Internaţională sunt

Cerrahoğlu Ömer	X
Bumbăcea Radu	XII
Drăgoi Octav	XII
Ivanovici Ştefan	XII
Spătaru Ştefan	IX
Tamaş Ioana-Maria	XII

iar echipa pentru Tuymaada (Yakutia) este

Toma Florina	XI
Gramatovici Ştefan-Cosmin	X
Măgălie Andreea	X