Clasa a X-a - Etapa 4

Problema 1. *Să se determine* $m \in R$ *pentru care ecuaţia*

$$7^{x^2-mx} - 7^{x-1} + x^2 - (m+1)x + 1 = 0$$

are două soluţii reale distincte.

Soluţie. Definim funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 7^x + x$. Această funcţie este strict crescătoare, deoarece este suma a două funcţii strict crescătoare ($x \mapsto 7^x$ şi $x \mapsto x$). De aici rezultă că funcţia f este injectivă.

Ecuaţia dată se mai poate scrie sub forma

$$f(x^2 - mx) = f(x-1).$$

Cum funcţia f este injectivă, deducem că

$$x^2 - mx = x - 1,$$

ceea ce se mai poate scrie

$$x^2 - (m+1)x + 1 = 0.$$

Această ecuaţie are două soluţii reale în cazul în care $\Delta > 0$, adică $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.