Problema 4. Fie $\mathscr{C}$ un cerc de centru O şi rază R, fixat, şi C un punct exterior cercului. Fie A un punct mobil pe cercul $\mathscr{C}$, nesituat pe dreapta OC, B punctul diametral opus lui A, iar H ortocentrul triunghiului ABC. Se cere locul geometric al lui H.

pregătire lot Ungaria, 2012

Soluţie: Fie P proiecţia lui H pe CO. Vom arăta că acest punct este fix.

Din teorema medianei rezultă că $CO^2 = \dfrac{2(CA^2+CB^2)-AB^2}{4}$, deci $CA^2+CB^2 = 2CO^2 - \dfrac{AB^2}{2}$ este constantă (nu depinde de poziţia punctului C).

Arătăm că $PC^2 - PO^2 = HC^2 - HO^2$ este constant.

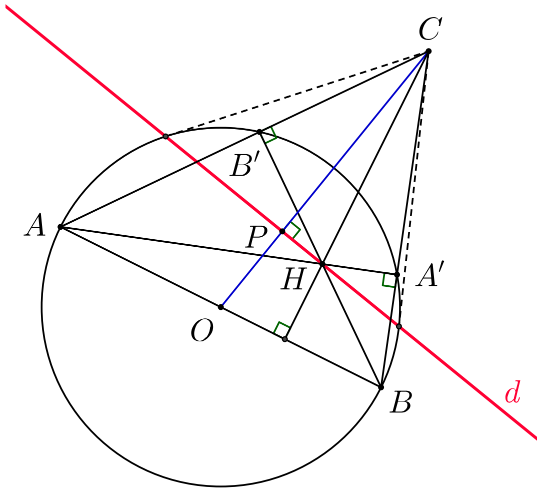
$$PC^2 - PO^2 = HC^2 - HO^2 = \frac{CA'^2 + A'H^2 + CB'^2 + B'H^2}{2} - \frac{2(HA^2+HB^2)-AB^2}{4} = \frac{CA'^2 + A'H^2 + CB'^2 + B'H^2}{2} - \frac{2(HA'^2+A'B^2+HB'^2+B'A^2)-AB^2}{4} = \frac{CA'^2-BA'^2}{2} + \frac{CB'^2-AB'^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{CA^2-BA^2}{2} + \frac{CB^2-AB^2}{2} + \frac{AB^2}{4} = CO^2 - 2R^2,$$

adică o constantă.

Rezultă că $PC^2 - PO^2 = (PC-PO)(PC+PO) = CO(PC-PO)$ este constant, deci $PC-PO$ şi $PC+PO$ sunt constante, deci PC este constantă. Prin urmare P este punct fix şi locul geometric este inclus în perpendiculara în P pe CO, dreaptă pe care o vom nota în continuare cu d.

Reciproc, arătăm că orice punct al dreptei d aparţine locului geometric.

Dacă H este un punct al acestei drepte, din O ducem perpendiculara pe CH. Notăm cu A şi B intersecţiile acestei perpendiculare cu cercul. Conform celor de mai sus, ortocentrul, notat H', al triunghiului ABC aparţine dreptei d. Pe de altă parte, el aparţine şi perpendicularei din C pe AB. Prin urmare $H' = H$, deci H aparţine locului geometric.



Remarcă: Dacă AT_1 şi AT_2, cu T_1, $T_2 \in \mathscr{C}$ sunt tangentele din C la cerc, atunci $CT_1^2 - OT_1^2 = CO^2 - 2OT_1^2 = CO^2 - 2R^2$ şi analog pentru T_2, deci T_1, $T_2 \in d$. Aşadar $d = T_1T_2$, adică locul geometric este *polara* punctului C faţă de cerc.