

## INDUCȚIA MATEMATICĂ

ABSTRACT. Această a doua lecție din ciclul pentru gimnaziu va încerca să prezinte adevărata forță a metodei inducției matematice.

Lecția 2 se adresează claselor VII, VIII, IX.

Data: 19 octombrie 2009.

Autor: Dan Schwarz, Comisia de Probleme ONM.

### 1. INTRODUCERE ȘI NOTAȚII

**1.1. Introducere.** Metoda inducției matematice, așa cum este ea introdusă în manualele școlare, poate lăsa falsa impresie că este limitată la verificarea unor formule date. De fapt, adevărata sa utilitate este în crearea pas cu pas a unor modele, și în verificarea unor ipoteze uneori mult mai complexe decât o simplă formulă.

Dar pentru a începe, o definiție cât mai generală a principiului inducției matematice.

**Principiu.** Fiind dată o afirmație  $P(n)$  care depinde de valoarea unui număr întreg  $n$ , și care

- este adevărată pentru  $k \geq 1$  valori inițiale consecutive  $n_1, n_2, \dots, n_k$ ,
- poate fi demonstrată pentru orice valoare  $n > n_k$ , bazându-se pe adevărul afirmației pentru toate valorile  $m$  mai mici  $n_1 \leq m \leq n - 1$ ,

atunci afirmația este adevărată pentru toate numerele  $n \geq n_1$ .

În cele mai multe cazuri se lucrează cu un singur ( $k = 1$ ) caz inițial  $n_1$ , de obicei 0 sau 1, și se demonstrează implicația simplă  $P(n) \implies P(n + 1)$ .

**1.2. Aplicații Simple.** O critică a exemplelor clasice din manuale.

**Exemplul 1.** Pentru  $n \in \mathbb{N}^*$  demonstrați prin inducție matematică formula

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

*Soluție.* Verificăm pentru  $n = 1$  că  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ . Apoi, aplicând ipoteza de inducție,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

adică valoarea căutată  $\frac{n+1}{(n+1)+1}$ .

Și dacă formula nu este dată? Unii sugerează ghicirea, apoi verificarea prin inducție (ceea ce în unele cazuri este inevitabil). Dar aici este cu mult preferabil să descoperim rațiunea mai adâncă a acestui rezultat. În același timp, vom învăța o tehnică extrem de utilă pentru multe alte cazuri. Pornim de la evidentă egalitate  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ . Atunci

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Numele consacrat al acestei tehnici este scriere în fracții simple, urmată de telescopare.  $\square$

**Exemplul 2.** Pentru  $n \in \mathbb{N}$  demonstrați prin inducție matematică că

$$323 \mid 20^{2n} + 16^{2n} - 3^{2n} - 1.$$

*Soluție.* Verificăm pentru  $n = 0$  că  $323 \mid 1 + 1 - 1 - 1 = 0$ . Se vede că  $323 = 17 \cdot 19$ . Avem pentru  $n \geq 1$

$$20^{2(n+1)} + 16^{2(n+1)} - 3^{2(n+1)} - 1 = 400 \cdot 20^{2n} + 256 \cdot 16^{2n} - 9 \cdot 3^{2n} - 1.$$

Dar  $400 = 23 \cdot 17 + 9$  și  $256 = 15 \cdot 17 + 1$ , deci rămâne a demonstra că

$$9 \cdot 20^{2n} + 16^{2n} - 9 \cdot 3^{2n} - 1 = 9(20^{2n} + 16^{2n} - 3^{2n} - 1) - 8(16^{2n} - 1)$$

se divide prin 17. Aplicând ipoteza de inducție, rămâne a demonstra că  $17 \mid 16^{2n} - 1 = 17 \cdot 16^{2n-1} - (16^{2n-1} + 1)$ ; finalmente  $17 \mid 16^{2n-1} + 1$ , căci în general  $a + b \mid a^{2n-1} + b^{2n-1}$ .

În mod cu totul similar se demonstrează divizibilitatea prin 19.

Personal, prefer de departe următoarea soluție, bazată doar pe elementare calcule aritmetice. Avem, pe de o parte,

$$20^{2n} + 16^{2n} - 3^{2n} - 1 \equiv 3^{2n} + (-1)^{2n} - 3^{2n} - 1 = 0 \pmod{17},$$

și pe de altă parte,

$$20^{2n} + 16^{2n} - 3^{2n} - 1 \equiv 1^{2n} + (-3)^{2n} - 3^{2n} - 1 = 0 \pmod{19}.$$

Esența problemei se dovedește a ține de aritmetica modulară.  $\square$

## 2. APLICAȚII SOFISTICATE

**2.1. Paradoxul lui Pólya.** Această inegalitate, în diverse forme, apare în numeroase manuale și culegeri de probleme.

**Exemplul 3.** Pentru  $n \in \mathbb{N}^*$  demonstrați inegalitatea

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}.$$

*Soluție.* Verificăm pentru  $n = 1$  că  $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Apoi, aplicând ipoteza de inducție, obținem

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} = \left( \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \right) \frac{2n+1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{3n}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)},$$

expresie finală pe care am dori să o demonstrăm a fi  $\leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)}}$ . Din păcate calcule simple conduc la  $(2n+1)^2 \leq 4n(n+1)$ , ceea ce este patent fals!

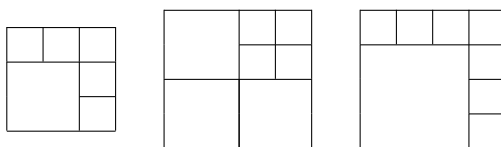
Suntem într-un impas. Faptul că inegalitatea nu poate fi prelungită nu înseamnă în niciun caz că afirmația este falsă, ci doar că metoda încercată de noi a eșuat. Dacă nu am mai văzut niciodată "trucul" care urmează, șansele noastre sunt extrem de reduse!

Ideea, ciudată, aparent împotriva bunului simț, este de a demonstra o inegalitate mai puternică. Marele matematician George Pólya a numit acest fenomen "un paradox al inducției". Așadar, vom încerca mai degrabă să demonstrăm inegalitatea față de termenul  $\frac{1}{\sqrt{3n+1}} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$ . Verificăm pentru  $n = 1$  că  $\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4}}$ . Apoi, aplicând ipoteza de inducție, calcule asemănătoare cu cele de mai sus sunt acum (miraculos) încununat cu succes.  $\square$

**2.2. Alte Aplicații Interesante.** Există însă în unele manuale și (puține) exemple într-adevăr reușite.

**Exemplul 4.** Demonstrați că un pătrat poate fi partiționat în  $n$  pătrate (de laturi nu neapărat distincte ca lungimi), pentru orice întreg pozitiv  $n \geq 6$ .

*Soluție.* Mai întâi cazurile inițiale, cu partiționări în 6, 7 și 8 pătrate.



Pentru pasul de inducție, vom aplica metoda de a partiționa un pătrat în alte patru pătrate, ilustrată de colțul dreapta-sus din modelul cu 7 pătrate (obținut astfel dintr-un model cu 4 pătrate). Astfel, un model pentru orice  $n > 8$  se poate obține din modelul pentru  $n - 3$ , prin partiționarea oricărui dintre pătratele componente în alte 4 pătrate, ca mai sus.

Se poate demonstra că un pătrat nu poate fi partiționat în 5 pătrate.  $\square$

**Exemplul 5.** Determinați toate șirurile  $(a_n)_{n \geq 1}$  formate din numere reale strict pozitive, pentru care avem

$$\sum_{i=1}^n a_i^3 = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2$$

pentru orice valoare  $n \geq 1$ .

Laurențiu Panaitopol

*Soluție.* Măiestria acestui ultim exemplu constă și în faptul că nu este imediat vizibilă afirmația care va fi demonstrată prin inducție. Pentru  $n = 1$ , relația dată devine  $a_1^3 = a_1^2$ , deci  $a_1 = 1$  (valoarea 0 nu este admisibilă, căci termenii șirului sunt strict pozitivi). Lansăm conjectura că afirmația  $P(n)$  " $a_n = n$ " este adevărată (sprijinită eventual și de un calcul rapid care arată acum că pentru  $n = 2$  rezultă  $a_2 = 2$ ). Cum am verificat deja cazul inițial  $n = 1$ , nu ne rămâne decât demonstrarea pasului de inducție. Avem

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i^3 = \sum_{i=1}^n a_i^3 + a_{n+1}^3 = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 + a_{n+1}^3,$$
$$\left( \sum_{i=1}^{n+1} a_i \right)^2 = \left( \sum_{i=1}^n a_i + a_{n+1} \right)^2 = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) a_{n+1} + a_{n+1}^2.$$

Pentru a avea egalitate, avem nevoie ca

$$a_{n+1}^3 = 2 \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) a_{n+1} + a_{n+1}^2.$$

Dar, conform cu ipoteza de inducție, avem

$$2 \sum_{i=1}^n a_i = 2 \sum_{i=1}^n i = n(n+1),$$

deci condiția de egalitate devine

$$a_{n+1}^3 = n(n+1)a_{n+1} + a_{n+1}^2, \text{ adică } a_{n+1}(a_{n+1} + n)(a_{n+1} - (n+1)) = 0.$$

Cum avem  $a_{n+1} > 0$ , singura posibilitate este  $a_{n+1} = n+1$ , care confirmă pasul de inducție.  $\square$

**2.3. O Problemă Specială.** O problemă care combină utilizarea ingenioasă a inducției cu întărirea ipotezei de inducție (în spiritul paradoxului lui Pólya) este următoarea

**Problema 1.** Fie date numerele întregi  $n \geq m \geq 1$ , și un tablou pătratic  $n \times n$ , conținând  $0 \leq N \leq m^2$  elemente egale cu 1. De câte ori o linie (respectiv coloană) conține cel puțin  $m$  elemente egale cu 1, linia (respectiv coloana) poate fi completată cu valori 1. Atunci singurul caz când întregul tablou poate fi, pas cu pas, completat cu valori 1 este pentru  $N = m^2$  (pentru anumite configurații speciale).

**Încercați să găsiți o soluție înainte de a citi mai departe!**

Pentru a putea rezolva rapid această problemă, este indicat să-i schimbăm enunțul în modul cel mai general cu putință (este unul dintre cazurile rare, dar extrem de plăcute estetic, când un enunț mai general este mai ușor de abordat decât cazul particular, datorită unei manipulări ne-restricționate, permisă tocmai de generalitatea acestui enunț).