COMENTARII FAZA JUDEŢEANĂ, 9 MARTIE 2013

ABSTRACT. Personal comments on some of the problems presented at the District Round of the National Mathematics Olympiad 2013.
Data: 12 martie 2013.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Aceste comentarii asupra Fazei Judeţene a Olimpiadei de Matematică 2013, reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectată a probelor de concurs.[1]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

2. Clasa a IX-a

Subiectul (1)**.** *a) Demonstraţi că, oricare ar fi numărul real x, are loc inegalitatea*

$$x^4 - x^3 - x + 1 \geq 0.$$

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = & 3 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = & x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \end{cases}$$

Gazeta Matematică

Soluţie. a) $x^4 - x^3 - x + 1 = (x-1)(x^3-1) = (x-1)^2(x^2+x+1) \geq 0$, cu egalitate doar pentru $x = 1$.

b) Ideea a fost utilizată până la epuizare; notând $p(x) = x^4 - x^3 - x + 1$, se obţine prin combinarea celor două ecuaţii $p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) = 0$, de unde, conform cu cele de mai sus, $p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = 0$, pentru $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Obositor, şi plicticos. □

Subiectul (3)**.** *Fie n un număr natural nenul şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale astfel încât $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq k$, oricare ar fi $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Arătaţi că*

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

[1] Lipsesc unele probleme, la care nu am găsit interesul de a fi prezentate.

Soluţie. Fie $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, oricare ar fi $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, şi fie şi $S_0 = 0$. Evident, $a_k = S_k - S_{k-1}$.

Avem inegalitatea clară $\dfrac{x}{k} + \dfrac{y}{k+1} \leq \dfrac{x+\varepsilon}{k} + \dfrac{y-\varepsilon}{k+1}$ pentru orice $\varepsilon \geq 0$. Scriem atunci

$$\frac{S_1 - 0}{1} + \frac{a_2}{2} = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} \leq \frac{1}{1} + \frac{a_2 + a_1 - 1}{2} = \frac{1}{1} + \frac{S_2 - 1}{2}$$

şi în general

$$\frac{S_k - (k-1)}{k} + \frac{a_{k+1}}{k+1} \leq \frac{1}{k} + \frac{S_{k+1} - k}{k+1}$$

pentru orice $1 \leq k \leq n-1$. Însumând obţinem

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{S_n - (n-1)}{n},$$

cu evident $\dfrac{S_n - (n-1)}{n} \leq \dfrac{1}{n}$. Egalitate în enunţ se obţine deci doar pentru $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$. Am prezentat această soluţie, relativ complicată formal, şi pentru a justifica ideea din Soluţia Oficială 1.

Soluţia Oficială 2 prezintă o eroare gravă de calcul. Notând

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{k},$$

se pretinde a se deduce relaţia $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k(k+1)}$, care este falsă, şi deci nu poate duce la rezultat. Ceea ce se obţine este de fapt

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)} + \frac{S_n}{n} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k(k+1)} + \frac{n}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{1},$$

adică exact inegalitatea cerută.

De fapt, totul se rezumă la folosirea formulei de sumare Abel, care afirmă că fiind date două secvenţe finite de numere $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ avem

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = (x_1 - x_2)y_1 + (x_2 - x_3)(y_1 + y_2) + \cdots$$

$$+(x_{n-1} - x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + x_n(y_1 + y_2 + \cdots + y_n).$$

Luând x_k o secvenţă descrescătoare de numere reale nenegative, şi $y_k = a_k$, deci cu $y_1 + y_2 + \cdots + y_k \leq k$ pentru $1 \leq k \leq n$, din aceste inegalităţi se obţine exact formula lui Abel pentru $y'_k = 1$, deci expresia $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Nu este deci nimic special legat de secvenţa actualmente folosită $x_k = \dfrac{1}{k}$, în afară de caracterul ei descrescător. Arome ale inegalităţii Karamata sunt şi ele prezente ... $\square$

3. Clasa a X-a

Subiectul (2)**.** *Fie* $a, b \in \mathbb{C}$. *Să se arate că* $|az + b\overline{z}| \leq 1$*, pentru orice* $z \in \mathbb{C}$ *cu* $|z| = 1$*, dacă şi numai dacă* $|a| + |b| \leq 1$.

Soluţie. Desigur, din $|az + b\overline{z}| \leq |a||z| + |b||\overline{z}| = |a| + |b|$, una din implicaţii este evidentă. Pentru cealaltă, putem scrie $a = |a|\alpha$, $b = |b|\beta$, cu α, β numere complexe de modul 1. Să luăm acum z unul din cele două numere complexe pentru care $z^2 = \dfrac{\beta}{\alpha}$ (deci cu $|z| = 1$). Atunci

$$|az + b\overline{z}| = |az^2 + b| = ||a|\alpha z^2 + |b|\beta| = \left| |a|\frac{\alpha}{\beta}z^2 + |b| \right| = |a| + |b|,$$

şi totul este demonstrat. □

Subiectul (3)**.** *Se consideră funcţia* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x \in \mathbb{Q} \\ bx, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

unde a *şi* b *sunt două numere reale nenule.*

Să se arate că f *este injectivă dacă şi numai dacă* f *este surjectivă.*

Soluţie. Funcţia f este evident injectivă pe $\mathbb{Q}$ şi pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, cu $f(\mathbb{Q}) = a\mathbb{Q}$ şi $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = b(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, de unde şi $\mathbb{R} \setminus f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = b(\mathbb{Q})$.

Pentru ca f să fie injectivă, trebuie $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R} \setminus f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, adică $a\mathbb{Q} \subseteq b\mathbb{Q}$, sau $\mathbb{Q} \subseteq \dfrac{b}{a}\mathbb{Q}$. Aceasta implică $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, şi atunci avem chiar egalitate.

Pentru ca f să fie surjectivă, trebuie $\mathbb{R} \setminus f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subseteq f(\mathbb{Q})$, adică $b\mathbb{Q} \subseteq a\mathbb{Q}$, sau $\mathbb{Q} \subseteq \dfrac{a}{b}\mathbb{Q}$. Aceasta implică $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, şi atunci avem chiar egalitate.

Prin urmare, fiecare din condiţii se întâmplă dacă şi numai dacă a şi b sunt comensurabile, ceea ce duce la bijectivitatea funcţiei f.

Soluţia oficială o fi fost copiată din manualul lui Burtea (problema A23, pagina 94 – o variantă a acestei probleme), ceea ce ar explica complicaţiile inutile. Desigur, nu lucrul cu concepte ca $\operatorname{Im} f$ şi o înţelegere mai adâncă a injectivităţii şi surjectivităţii, ca în soluţia mea prezentată mai sus, este ceea ce trebuie să îi învăţăm pe copii; mai bine o aplicare mecanică a definiţiilor, înecată în formalism, relativ prolixă, şi laborioasă, nu-i aşa? □

4. Clasa a XI-a

Subiectul (1)**.** *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir crescător şi mărginit. Definim*

$$x_n = (2a_n - a_1 - a_2)(2a_n - a_2 - a_3)\cdots(2a_n - a_{n-2} - a_{n-1})(2a_n - a_{n-1} - a_1)$$

pentru $n \geq 2$. *Determinaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Gazeta Matematică

Soluţie. De fapt este suficient a se da şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ convergent. Atunci există N cu $|a_p - a_q| \leq \dfrac{1}{4}$ pentru $p, q \geq N$ şi deci, notând $M = \sup\{|a_n| \mid n \geq 1\}$ (căci şirul este mărginit), avem $|x_{n+N}| \leq \dfrac{(4M)^N}{2^{n-1}}$ pentru orice $n \geq 1$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

O problemă esenţialmente banală, bazată pe principiul cleştelui, aplicat pentru o majorare imediat vizibilă a şirului considerat. Alte metode, cum ar fi criteriul raportului, sau altele, sunt în realitate chiar prea puternice pentru a fi necesarmente luate în consideraţie aici. □

Soluţie Alternativă. (Vasile Gorgotă) O soluţie simpatică, ce se prevalează de structura favorabilă a termenilor şirului $(x_n)_{n\geq 2}$ mi-a fost comunicată. Deoarece cei $n-1$ factori ai termenului x_n sunt nenegativi, putem aplica inegalitatea AM-GM a mediilor

$$x_n \leq \left(\frac{2(n-1)a_n - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})}{n-1}\right)^{n-1} = 2^{n-1}\left(a_n - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k}{n-1}\right)^{n-1}$$

Dar şirul $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k}{n-1}$ are aceeaşi limită ca şi a_n, de exemplu aplicând Cesàro-Stolz, deci există N astfel ca pentru toţi $n \geq N$ să avem $0 \leq a_n - \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k}{n-1} \leq \dfrac{1}{3}$, dar atunci

$$0 \leq x_n \leq 2^{n-1}\left(a_n - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k}{n-1}\right)^{n-1} \leq (2/3)^{n-1} \to 0.$$

Această idee nu poate fi adaptată cazului unde şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este dat doar convergent, căci unii factori ai termenului x_n pot lua valori negative. □

Subiectul (2)**.** *Fie matricele de ordin* 2 *cu elemente reale* A *şi* B *astfel încât*

$$AB = A^2B^2 - (AB)^2 \quad \text{şi} \quad \det(B) = 2.$$

a) Arătaţi că matricea A *nu este inversabilă.*
b) Calculaţi $\det(A + 2B) - \det(2A + B)$.

Soluţie. Doar pentru a face o mică observaţie. O chestiune de interes teoretic este dacă există astfel de matrice cu $A \neq O_2$. Într-adevăr,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(unde tot ce contează este $\det(B) = 2$ şi $b_{2,1} = -1$). Oare există şi exemple altele decât cu A nilpotent? Oricum, o metodă de a stabili valoarea cerută la punctul b) este de a observa că $A = O_2$ verifică, şi atunci $\det(A + 2B) - \det(2A + B) = \det(2B) - \det(B) = 6$. Iar soluţia merge şi pentru matrice complexe. □

Subiectul (3)**.** *Fie A o matrice neinversabilă de ordin $n > 1$, cu elemente în mulţimea numerelor complexe, toate elementele având modulul egal cu* 1.

a) Arătaţi că pentru $n = 3$, două dintre liniile sau două dintre coloanele matricei A sunt proporţionale.

b) Rămâne adevărată concluzia de la punctul anterior pentru $n = 4$?

Soluţie. a) Nu sunt în posesia unui argument teoretic mai adânc pentru a justifica acest rezultat plăcut estetic, şi oarecum surprinzător. Soluţia oficială trece prin calcule destul de complicate pentru a obţine afirmaţia cerută.

b) Următorul exemplu este mai uşor de produs decât cel dat în soluţia oficială, a cărui justificare nici măcar nu o înţeleg (din bune motive, indicaţia fiind greşită ...).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & -1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} & -1 & 1 \\ -\mathrm{i} & -1 & 1 & \mathrm{i} \\ -1 & 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Matricea este evident singulară, căci suma liniilor (sau coloanelor) este vector nul, şi fără a avea două dintre liniile sau două dintre coloanele sale proporţionale. □

Subiectul (4)**.** *Se consideră o funcţie monotonă $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

a) Demonstraţi că f are limite laterale în fiecare punct $x \in \mathbb{R}$.

b) Definim funcţia $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \lim\limits_{t \to x, t < x} f(t)$, i.e. $g(x)$ este limita la stânga în punctul x a funcţiei f. Arătaţi că dacă funcţia g este continuă, atunci funcţia f este continuă.

Soluţie. a) Lucrăm cu f monoton crescătoare (dacă este descrescătoare, putem folosi $-f$). Deoarece pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $t < x$ avem $f(t) \leq f(x)$, rezultă că $\sup\{f(t) \mid t < x\} \leq f(x)$, şi în mod evident (din definiţii) $f(x - 0) = \sup\{f(t) \mid t < x\}$. La fel, $f(x + 0) = \inf\{f(t) \mid t > x\}$.

b) Luând $g(x) = f(x - 0)$, avem atunci $g(x) \leq f(x) \leq g(y)$ pentru orice $y > x$. Dar dacă g este continuă, atunci $\lim\limits_{y \to x, y > x} g(y) = g(x)$, şi deci f coincide cu g.

Soluţia oficială intră în mult mai multe detalii, probabil dintr-o dorinţă de a justifica această "non-problemă " (şi am unele bănuieli că lipsa acestor detalii a dus la severe depunctaje în cadrul corecturii). Fenomenul prezentat aici este atât de trivial, încât, după părerea mea, se descalifică pentru o problemă de concurs, cu atât mai mult problema 4. □

5. Clasa a XII-a

Subiectul (1). *Să se calculeze limita* $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{x^n}\,dx$.

Soluţie. Un caz ultra particular al bine-cunoscutului şi clasicului rezultat $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x = f(0)$ pentru orice funcţie continuă $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

Soluţia merge cam aşa. Fie $M > 0$ astfel ca $|f(x)| \leq M$ pentru orice $x \in [0,1]$, şi fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $\delta > 0$ astfel ca $|f(t) - f(0)| \leq \varepsilon$ pentru orice $0 \leq t \leq \delta$. Fie şi $0 < \mu < 1$; atunci $0 \leq x^n \leq \delta$ pentru $0 \leq x \leq 1-\mu$ şi n suficient de mare. Avem $\left|\int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x - f(0)\right| = \left|\int_0^1 (f(x^n) - f(0))\mathrm{d}x\right|$ şi

$$\left|\int_0^1 (f(x^n) - f(0))\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^{1-\mu} |f(x^n) - f(0)|\mathrm{d}x + \int_{1-\mu}^1 |f(x^n) - f(0)|\mathrm{d}x.$$

Dar atunci

$$\int_0^{1-\mu} |f(x^n) - f(0)|\mathrm{d}x \leq \varepsilon(1-\mu) \text{ şi } \int_{1-\mu}^1 |f(x^n) - f(0)|\mathrm{d}x \leq 2\mu M,$$

deci $\left|\int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x - f(0)\right| \leq \varepsilon(1-\mu) + 2\mu M$, expresie care are o valoare oricât de mică, pentru ε, μ suficient de mici. □

Subiectul (2). *Un grup $(G,\cdot)$ are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă pentru orice automorfism f al lui G există două automorfisme g şi h ale lui G, astfel încât $f(x) = g(x)h(x)$, oricare ar fi $x \in G$. Să se arate că*

a) Orice grup care are proprietatea $\mathcal{P}$ este comutativ.
b) Orice grup comutativ finit de ordin impar are proprietatea $\mathcal{P}$.
c) Niciun grup finit de ordin $4n+2$, $n \in \mathbb{N}$, nu are proprietatea $\mathcal{P}$.

Soluţie. Nu voi prezenta soluţia acestei probleme; singurul motiv pentru care o prezint este pentru a sublinia că prezenţa proprietăţii $\mathcal{P}$ depinde doar de faptul că automorfismul identic Id_G se poate scrie ca produsul de alte două automorfisme.

Într-adevăr, dacă există automorfismele g_0 şi h_0 ale lui G, astfel încât $x = g_0(x)h_0(x)$ oricare ar fi $x \in G$, pentru orice automorfism f al lui G putem lua $g = f \circ g_0$ şi $h = f \circ h_0$. Avem atunci $f(x) = f(g_0(x)h_0(x)) = f(g_0(x))f(h_0(x)) = g(x)h(x)$. De altfel, în mod esenţial în soluţie, se foloseşte doar descompunerea lui Id_G. □

6. Încheiere

Se continuă ţinerea în secret a autorilor problemelor date în concurs; pentru mine, efectul este doar de a nu şti pe cine blama pentru lipsa de interes, platitudinea, sau "fabricarea" unora dintre aceste probleme. Desigur – şi ştiu acest lucru din timpurile când participam şi eu la compunerea subiectelor – comisia de selecţie a problemelor este cumva la mila propunătorilor, a căror producţie descreşte alarmant, atât în cantitate, cât şi în calitate. Dar parcă, mai pe vremuri, mai compuneau şi membrii comisiei câteva probleme, care aduceau un suflu proaspăt şi o undă de interes. Sincer vorbind, dacă aş fi un concurent în zilele de azi, aş avea mari şanse să ies dezamăgit din sala de concurs, rezolvând probleme banale sau plicticoase, şi tânjind după vreo chestiune care să mă facă să-mi pun întrebări pe care, poate, nu mi le-am pus până atunci.