Problema 2. Determinaţi valorile numărului natural $n \geq 2$ pentru care există numere întregi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel încât să aibă loc simultan relaţiile:

$$x_1^2 + x_2^2 + 50 = 16x_1 + 12x_2,\ \ x_2^2 + x_3^2 + 50 = 16x_2 + 12x_3,\ \ldots\ ,$$
$$x_{n-1}^2 + x_n^2 + 50 = 16x_{n-1} + 12x_n \ \text{ şi } \ x_n^2 + x_1^2 + 50 = 16x_n + 12x_1.$$

Olimpiadă Polonia, 1999

Soluţie: Rescriem ecuaţia $x^2 + y^2 + 50 = 16x + 12y$ sub forma $(x-8)^2 + (y-6)^2 = 50$. Singurele soluţii întregi ale acesteia sunt $(7,-1)$, $(7,13)$, $(9,-1)$, $(9,13)$, $(3,1)$, $(3,11)$, $(13,1)$, $(13,11)$, $(1,5)$, $(1,7)$, $(15,5)$ şi $(15,7)$. Astfel, fiecare pereche (x_i, x_{i+1}) (unde $x_{n+1} = x_1$) trebuie să fie una dintre cele de mai sus. Asta înseamnă că x_i trebuie să fie un număr care apare atât pe post de primă componentă a unei perechi, cât şi pe post de cea de-a doua componentă a unei perechi. Aşadar $x_i \in \{1, 7, 13\}$. În plus, se vede că dacă, de exemplu, $x_i = 1$, atunci trebuie ca $x_{i+1} = 7$, $x_{i+2} = 13$, $x_{i+3} = 1$ ş.a.m.d., adică numerele trebuie să se repete din trei în trei. Acest lucru este posibil numai dacă n este divizibil cu 3. Aşadar, este necesar ca n să fie multiplu de 3.
Pe de altă parte, dacă n este multiplu de 3, există numere care să satisfacă relaţiile date, de exemplu numerele $x_{3k} = 1$, $x_{3k+1} = 7$, $x_{3k+2} = 13$, $\forall i$, deci condiţia ca n să fie multiplu de 3 este şi suficientă.
În concluzie, răspunsul este: orice $n \in \mathbb{N}^*$ multiplu de 3.