ECUAŢIA FUNCŢIONALĂ CAUCHY

REZUMAT. În această lecţie vom face o prezentare generală a ecuaţie funcţionale Cauchy.
Lecţia se adresează elevilor clasei a X-a.
Autor: Monea Mihai, Profesor, Colegiul Naţional Decebal Deva.

Ecuaţiile funcţionale ocupă un rol foarte important în matematică. Diferite încercări de a rezolva astfel de ecuaţii au condus chiar la dezvoltarea unor ramuri ale matematicii. Pentru studiul introductiv putem recomanda două lucrări excelente menţionate în bibliografie, respectiv [1] şi [4] . În această lecţie vom face o prezentare generală unui rezultat celebru, numit ecuaţia funcţională Cauchy.

Definiţia 1. *Ecuaţia*

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \\ f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x,y\in\mathbb{R} \end{cases} \qquad \textbf{(EC)}$$

se numeşte ecuaţia funcţională Cauchy.

Scopul nostru este să rezolvăm aceată ecuaţie. Apelând doar la cunoştinţe specifice clasei a X-a vom putea prezenta doar două cazuri complete. Pentru început lăsăm temă cititorului să demonstreze rezultatele cuprinse în teorema următoare:

Teorema 2. *Orice funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică (EC) are următoarele proprietăţi:*

a) $f(0)=0$;
b) $f(-x)=-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$;
c) $f(x-y)=f(x)-f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}$;
d) $f(x_1+x_2+...+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n), \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2, \forall x_1,...,x_n\in\mathbb{R}$;
e) $f(nx)=nf(x), \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Concluzia obţinută la punctul e) al Teoremei 2 poate fi extinsă după cum urmează:

Teorema 3. *Dacă o funcţie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *verifică (EC) atunci*

$$f(rx)=rf(x),\forall x\in\mathbb{R},r\in\mathbb{Q}.$$

Demonstraţie. Dacă în punctul e) al teoremei precedente facem transformarea $x\to\frac{x}{n}$ obţinem

$$f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{f(x)}{n}.$$

Presupunem pentru început $r\geq 0$. Atunci există $p\in\mathbb{N},q\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $r=\frac{p}{q}$. Atunci

$$f(rx)=f\left(\frac{p}{q}x\right)=pf\left(\frac{x}{q}\right)=\frac{p}{q}f(x)=rf(x).$$

Dacă $r<0$ atunci

$$f(rx)=f(-(-rx))=-f(-rx)=-(-f(rx))=f(rx)$$

şi se obţine astfel concluzia.

□

Acestea sunt toate rezultatele care se pot obţine până în acest moment. Dacă notăm $a=f(1)$, atunci deducem că

$$f(x)=ax,\forall x\in\mathbb{Q}.$$

Se prefigurează astfel concluzia că această ecuaţie admite ca soluţii funcţiile

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=ax.$$

Este evident că aceste funcţii sunt soluţii dar nu avem certitudinea că sunt singurele. Pentru a obţine concluzii mai clare este nevoie să îmbunătăţim ipotezele. Astfel obţinem următoarele două rezultate fundamentale legate de ecuaţia funcţională Cauchy, pe care le prezentăm însoţite de demonstraţii..

Teorema 4. *Singurele soluţii monotone ale ecuaţiei Cauchy sunt funcţiile*

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=ax.$$

Demonstraţie. Putem presupune că funcţiile căutate sunt crescătoare, cazul celălalt tratându-se analog. Pornind de la concluzia $f(x)=ax,\forall x\in\mathbb{Q}$, deducem $a\geq 0$. Presupunem prin reducerea la absurd că există $y\in\mathbb{R}$ pentru care

$$f(y)\neq ax.$$

Atunci $f(y) < ay$ sau $f(y) > ay$. Dacă $f(y) < ay$ atunci

$$\frac{f(y)}{a} < y,$$

deci există $r \in \mathbb{Q}$ astfel ca

$$\frac{f(y)}{a} < r < y,$$

(vezi [5]). Atunci

$$f(y) < ar < ay.$$

Dar inegalitatea $r < y$ conduce la concluzia

$$f(r) \leq f(y),$$

adică

$$ar \leq f(y)$$

ceea ce ne conduce la contaradicţie. Aşadar presupunerea este falsă, deci

$$f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Pentru următorul caz avem nevoie de câteva rezultate preliminare. Ca aplicaţii ale axiomei lui Arhimede se pot demonstra următoarele:

- Fie $\epsilon > 0$ şi $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x - y| < \frac{\epsilon}{n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $x = y$.
- Fie $\epsilon > 0$ şi $x, y, z \in \mathbb{R}$ cu $x < y < z$. Atunci există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x < y - \frac{\epsilon}{n} < y < y + \frac{\epsilon}{n} < z$.
- Fie $\epsilon > 0$ şi $x \in \mathbb{R}$. Atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $q \in \mathbb{Q}$ astfel încât $|q - r| < \frac{\epsilon}{n}$.

Lăsăm cititorului plăcerea de a descoperi singur demonstraţiile. Noi vom completa cu următoarea lemă.

Lemă. *Dacă f este o funcţie care verifică (EC) şi este mărginită pe un interval mărginit şi închis, atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât f este mărginită pe intervalul $[-\varepsilon, \varepsilon]$.*

Demonstraţie. Fie intervalul $[a, b]$ pe care admitem că funcţia f este mărginită. Atunci există $M > 0$ astfel ca

$$|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b].$$

Obţinem

$$x - \frac{a+b}{2} \in \left[-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}\right]$$

şi

$$f\left(x-\frac{a+b}{2}\right)=f\left(x\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

ceea ce conduce la

$$\left|f\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right|\leq 2M,$$

adică f este mărginită pe intervalul $[-\varepsilon,\varepsilon]$, unde $\varepsilon=\frac{a+b}{2}$. $\square$

Cu ajutorul rezultatelor descrise anterior putem enunţa şi demonstra teorema care urmează.

Teorema 5. *Singurele soluţii ale ecuaţiei Cauchy, mărginite pe un interval mărginit şi închis sunt funcţiile*

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f\left(x\right)=ax.$$

Demonstraţie. Conform lemei putem presupune acum că există numerele $\delta,\ M>0$ astfel încât $f\left(x\right)\in\left[-M,\ M\right],\forall x\in\left[-\delta,\delta\right].$ Putem presupune $\delta\in\mathbb{Q}$ pentru că, în caz contrar găsim $\delta_1\in\mathbb{Q}$ cu $0<\delta_1<\delta$.

Fie $r\in\left[-\delta,\delta\right]\cap\left(\mathbb{R}-\mathbb{Q}\right)$. Atunci există $m\in\mathbb{N}^*$ astfel ca oricare ar fi $n\in\mathbb{N},n>m$ să existe $q\in\mathbb{Q}$ astfel încât

$$-\delta<r-\frac{\delta}{n}<q<r+\frac{\delta}{n}<\delta.$$

Obţinem

$$n\left|q-r\right|<\delta,$$

deci $f\left(n\left|q-\delta\right|\right)\in\left[-M,M\right].$ Atunci

$$f\left(\left|q-r\right)\right|\in\left[-\frac{M}{n},\frac{M}{n}\right],$$

pentru orice $n\in\mathbb{N},n>m$. Dar $\left|q-r\right|\in\left\{q-r,r-q\right\}$ atunci $f\left(\left|q-r\right|\right)\in\left\{f\left(q\right)-f\left(r\right),f\left(r\right)-f\left(q\right)\right\}$, deci

$$\left|f\left(q\right)-f\left(r\right)\right|<\frac{M}{n},$$

pentru orice $n\in\mathbb{N},n>m$.

Atunci

$$\begin{aligned}\left|f\left(r\right)-ar\right|&=\left|f\left(r\right)-f\left(r\right)+aq-ar\right|\\&\leq\left|f\left(q\right)-f\left(r\right)\right|+\left|a\right|\left|q-r\right|\leq\frac{M}{n}+\frac{\left|a\right|\delta}{n}=\frac{M+\left|a\right|\delta}{n},\end{aligned}$$

pentru orice $n\in\mathbb{N},n>m$. Deducem astfel că $f\left(r\right)=ar$ ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Pornind de la rezultatete obţinute anterior putem analiza şi alte ecuaţii .

Ecuaţia 6.

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ f(x+y) = f(x) f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Să observăm că dacă există $y \in \mathbb{R}$ pentru care $f(y) = 0$, atunci

$$f(x) = f(x - y + y) = f(x - y) f(y) = 0,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deci funcţia $f = 0$ este soluţie. Mai departe putem presupune $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare putem logaritma relaţia

$$f(x+y) = f(x) f(y)$$

şi obţinem

$$\lg f(x+y) = \lg f(x) + \lg f(y),$$

ceea ce conduce la concluzia că funcţia

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \lg f(x)$$

verifică **(EC)**. Ştiind că funcţia logaritm este monotonă şi mărginită pe orice interval închis, putem aplica rezultatele Teoremelor 5 şi 6. Din egalitatea

$$\lg f(x) = g(x)$$

obţinem

$$f(x) = 10^{g(x)}$$

şi putem enunţa două concluzii:

- singurele soluţii nenule şi monotone ale ecuaţie 6 sunt reprezentete de funcţiile

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x,$$

unde $a > 0$.

- singurele soluţii nenule mărginite pe un interval închis ale ecuaţiei 6 sunt reprezentate de funcţiile

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x,$$

unde $a > 0$.

Ecuaţia 7.

$$\begin{cases} f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, \\ f(xy)=f(x)+f(y), \forall x,y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Dacă $x,y>0$ atunci există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel ca $x=10^a$ şi $y=10^b$. În aceste condiţii considerăm funcţia

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=f(10^x),$$

care verifică **(EC)**. Folosind proprietăţile funcţiei exponenţiale şi relaţia

$$f(x)=g(\lg x)$$

obţinem concluziile:

- singurele soluţii monotone ale ecuaţiei 7 sunt reprezentate de funcţiile

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=a\lg x,$$

unde $a\in\mathbb{R}$.

- singurele soluţii mărginite pe orice interval închis ale ecuaţiei 7 sunt reprezentate de funcţiile

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=a\lg x,$$

unde $a\in\mathbb{R}$.

Lăsăm cititorului curiozitatea de a aprofunda acest subiect şi de a analiza şi alte ecuaţii funcţionale cunoscute, ca de exemplu, ecuaţia lui Jensen

Bibliografie

[1] J. ACZÉL, *Functional Equations and Their Applications*, Academic Press, New York, 1966.
[2] V. POP, *Ecuaţii funcţionale*, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2002.
[3] V. RADU, *Lecţii de matematici elementare II*, Ed. Augusta, Timişoara, 2000.
[4] C. SMALL, *Functional Equations and How to Solve Them*, Springer, Boston, 2007.
[5] D. SCHWARTZ, *Mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale*, http://www.viitoriolimpici.ro.